מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 7 - פתרון

1. יהיו τ_1, τ_2 טופולוגיות על X . ו- B_1- בסיס ל-(X,τ_1) .
<u>הוכיחו</u> ש- $\tau_1 \subseteq \tau_2$ אם ורק אם $B_1 \subseteq \tau_2$.

<u>הוכחה.</u>
<u>כיוון 1:</u> נניח ש-$\tau_1 \subseteq \tau_2$. אזי $B_1 \subseteq \tau_1$ לפי הגדרת הבסיס.
לכן מקבלים $B_1 \subseteq \tau_1 \subseteq \tau_2 \Leftarrow B_1 \subseteq \tau_2$, מש"ל.
<u>כיוון 2:</u> נניח ש-$B_1 \subseteq \tau_2$. אזי $\widehat{B_1} \subseteq \tau_2$ כי טופולוגיה סגורה תחת פעולת האחוד. אבל $\widehat{B_1} = \tau_1$ לפי הגדרת הבסיס. אז לבסוף מקבלים: $\tau_1 \subseteq \tau_2$, מש"ל.

2. יהי B_1 בסיס של טופולוגיה במ"ט (X,T). יהי B_2 אוסף קבוצות פתוחות ב-(X,T) כך שלכל $V \in B_1$ ולכל $x \in V$ קיימת קבוצה $U \in B_2$ המקיימת $x \in U \subseteq V$.
<u>הוכיחו</u> ש- B_2 בסיס של T.

<u>הוכחה</u>
לפי התנאי $B_2 \subseteq T$ אז מתקים סעיף (I') של הגדרת הבסיס.
תהי W קבוצה פתוחת ב-(X,T) ו- $x \in W$. B_1 בסיס של (X,T). לכן לפי הגדרת הבסיס קיימת קבוצה $V \subseteq W$ כך ש-$x \in V \in B_1$. לפי התנאי קיימת קבוצה $U \in B_2$ המקיימת $x \in U \subseteq V$. אזי $x \in U \subseteq V \subseteq W \Leftarrow x \in U \subseteq W$.
זה מוכיח שמתקיים גם סעיף (II') של הגדרת הבסיס.
לכן B_2 בסיס של T, מש"ל.

3. הוכיחו שרכיבי קשירות של מרחב סורגנפריי הם נקודונים.

הוכחה

נניח – בשלילה – שקיימות שתי נקודות בקבוצה $\mathbb{R}$ כך ש-$a < b$ והן שייכות לאותו רכיב קשירות C.
אזי $a \in A := (-\infty, b)$ ו- $b \in B := [b, \infty)$.
קל לבדוק ש-

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[b-n, b-\frac{1}{n}\right), B = \bigcup_{n=1}^{\infty}[b, b+n)$$

ולכן הן פתוחות במרחב סורגנפריי. לכן $A \cap C, B \cap C$ פתוחות ב-C .
ברור ש-$A \cap B = \emptyset$ ולכן $(A \cap C) \cap (B \cap C) = \emptyset$.
חוץ מזה $(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C = \mathbb{R} \cap C = C$.
ולבסוף: $a \in A \cap C$ ו- $b \in B \cap C$.
ז"א, פיצלנו C לשתי קבוצות פתוחות, זרות ולא ריקות. סתירה.

4. תהי $A, X \subseteq \mathbb{R}^2$ מוגדרות באופן הבא:
$A = \{x, \sin\frac{1}{x} | x \in (0, \infty)\}$, $X = A \cup \{(0,0)\}$.
הוכיחו ש-A תת מרחב קשיר מסילתית ו-X תת מרחב קשיר.

הוכחה

הטופולוגיה גם ב-A וגם ב-X היא טופולוגיה המושרה מ-$\mathbb{R}^2$.
הטופולוגיה ב-$(0, \infty)$ היא טופולוגיה המושרה מ-$\mathbb{R}$.
נגדיר $\varphi: (0, \infty) \to A$ כך ש-$\varphi(x) = (x, \sin\frac{1}{x})$. אנחנו טוענים ש-$\varphi$ העתקה רציפה ונוכיח את זה עוד מאט (ראה/י "טענה" למטא). קל לראות שהיא גם פונקציה על.

לכן (ההרצאות) $A = \varphi(0,\infty)$ קבוצה קשירה מסילתית
כי $(0,\infty)$ קבוצה קשירה מסילתית – הדבר הראשון שהיה צ"ל.

<u>סימונים:</u> $\bar{A}^{\mathbb{R}^2}$ - סגור A בתוך $\mathbb{R}^2$, $\bar{A}^{X}$ - סגור A בתוך X.

<u>נוכיח עכשיו</u> ש- $(0,0) \in \bar{A}^{\mathbb{R}^2}$. תהי U סביבה של $(0,0)$ ב-$\mathbb{R}^2$.
אזי U מכילה כדור פתוח $B\big((0,0),\varepsilon\big) \subseteq U$ כאשר $\varepsilon > 0$.
נתבונן בסדרה $x_n \in \mathbb{R}$ כאשר $x_n = \frac{1}{\pi n}$. קל לראות ש-:

I. $x_n \to 0$ ו-
II. $A \ni (x_n, 0) = \left(x_n, \sin\frac{1}{x_n}\right) = \varphi(x_n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

העובדה (I.) גוררת שקיים $n_0 \in \mathbb{N}$
כך ש- $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$.
לכן $n \geq n_0 \Rightarrow (x_n, 0) \in B\big((0,0),\varepsilon\big)$. כלומר , בגלל (II.) ,
הכדור $B\big((0,0),\varepsilon\big)$ חותך את הקבוצה A ולכן U חותכת אותה.
זה מוכיח ש- $(0,0) \in \bar{A}^{\mathbb{R}^2}$, <u>משרצינו להוכיח</u>.

כיוון ש-$(0,0) \in X$ אז מתקיים $(0,0) \in \bar{A}^{X}$. לפי הגדרת X זה
מייד אומרת ש-$\bar{A}^{X} = X$, או במילים אחרותת:
המרחב A צפוף ב-X .
כיוון ש- A מ"ט קשיר מסילתית הוא קשיר.
לכן קשיר גם המרחב X, מש"ל.

נשאר להוכיח רק את ה-
<u>תענה.</u>
הפונקציה $\varphi: (0,\infty) \to A$ כך ש-$\varphi(x) = (x, \sin\frac{1}{x})$, רציפה.

הוכחת התענה.
אפשר להיסתכל על φ כמו על תצהאת צמצום הטווח של פונקציה $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ המוגדרת כ-$f = (f_1, f_2)$ כאשר $f_1(x) = x$ ו- $f_2(x) = \sin\frac{1}{x}$ לכל $x \in (0,\infty)$.
כיוון ש-f_1, f_2 רציפות אז גם f רציפה. לכן φ רציפה כתוצאת צמצום הטווח שלה, מש"ל

5. תהי $A \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה של כל הנקודות $a(x,y)$ שלפחות אחת מהקואורדינטות x, y רציונלית.
הוכיחו ש-A תת מרחב קשיר מסילתית.

הוכיחה
1) קודם כל נוכיח שלכל נקודה $a(x,y) \in A$ קיימת מסילה $\gamma_a\colon [0,1] \to A$ כך ש- $\gamma_a(0) = a$ ו- $\gamma_a(1) = o(0,0)$:
יהי - בלי הגבלת הכלליות - $x \in \mathbb{Q}$. אזי נגדיר שתי מסילות δ'_a ו- δ''_a
כך ש- $\delta'_a(t) = (x, (1-t)y)$ ו- $\delta''_a(t) = ((1-t)x, 0)$.
רואים ש- $\delta'_a(1) = \delta''_a(0) = (x, 0)$ ואפשר לשרשר את המסילות: $\gamma_a = \delta'_a * \delta''_a$.
אזי $\gamma_a(0) = \delta'_a(0) = a(x,y)$
ו- $\gamma_a(1) = \delta''_a(1) = o(0,0)$.
רואים גם ש-$\delta''_a([0,1]) \subseteq A, \delta'_a([0,1]) \subseteq A$.
לכן $\gamma_a([0,1]) \subseteq A$.

2) אם $a, b \in A$ אז המסילה $\gamma_a * \overline{\gamma_b}$ מחברת את הנקודות a, b כך ש-$\gamma_a * \overline{\gamma_b}([0,1]) \subseteq A$, כלומר, לכל שתי נקודות ב-A יש מסילה (בתוך A) שמחברת אותן, מש"ל.