

תורת החבורות (88218)

מבחן מסכם, מועד א'

סמסטר א' תשע"ח

מרצה: מיכאל משה שיין.
יש לענות על כל השאלות ולתת נימוקים מלאים לכל התשובות. סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתיחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד.
משך הבחינה: שלוש שעות. כל חומר עזר אסור. בהצלחה!

1. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(א) תהי G חבורה ותהי $H \trianglelefteq G$ תת-חבורה נורמלית. אם G אבלית, אזי H ו- G/H אבליות גם כן.

(ב) תהי G חבורה ותהי $H \trianglelefteq G$. אם H ו- G/H אבליות, אזי G גם אבלית.

2. (א) תהי G חבורה שפועלת על קבוצה A . תהי $H \leq G$ תת-חבורה שפועלת על A באופן טרנזיטיבי. הוכח כי $G = HG_a$ לכל $a \in A$ ¹.

(ב) תהי G חבורה סופית ותהי $H \trianglelefteq G$. תהי $P \leq H$ תת-חבורת p -סילוב של H עבור איזשהו ראשוני p . הוכח כי $G = HN_G(P)$.
רמז: אפשר להיעזר בסעיף הקודם.

3. נתבונן בתמורה $\sigma = (12345)$.

(א) מצא את המרכז $C_{S_5}(\sigma)$.

(ב) מצא את המרכז $C_{A_5}(\sigma)$.

(ג) האם קיימים איברים של A_5 שצמודים ל- σ ב- S_5 אבל לא ב- A_5 ? אם כן, מצא את כולם.

4. (א) תהי G חבורה מסדר 35. הוכח כי $G \simeq \mathbb{Z}_{35}$. שים לב שלא הנחנו כי G אבלית.

(ב) תהי G חבורה מסדר $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. תהיינה H ו- K תת-חבורות 5-סילוב ו-7-סילוב, בהתאמה. הוכח שלפחות אחת מהן נורמלית.

(ג) הוכח כי באמת $H \trianglelefteq G$ וגם $K \trianglelefteq G$.

רמז: התבונן בחבורה HK והיעזר בסעיף הקודם.

5. (א) כמה הומומורפיזמים $f: \mathbb{Z}_4 \rightarrow S_4$ יש?

(ב) תהי G חבורה סופית. הוכח שאם קיים הומומורפיזם לא-טריוויאלי $f: A_6 \rightarrow G$, אזי $360 \mid |G|$.

¹ G_a מסמן כאן את המייצב של a , כמו בשיעור. בתרגול המייצב סומן $Stab(a)$.