אלגברה לינארית למורים- פתרון תרגיל 8

שאלה 1

מצאו בסיס למרחב הפתרונות של המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון

תחילה נמצא את מרחב הפתרונות של המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 - 2R_2 \to R_4]{R_3 + R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שיש שתי משתנים חופשיים ולכן נסמן:

$$x_2 = t, x_4 = s$$

כעט, נייצג את שאר המשתנים באמצעות משתנים אילו.

$$x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_4 \Rightarrow x_3 = -s$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3 \Rightarrow x_1 = s - t$$

ולכן נקבל שאוסף הפתרונות של המערכת הוא מהצורה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} s-t \\ t \\ -s \\ s \end{pmatrix} \middle| t, s \in R \right\} = \left\{ t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t, s \in R \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

והרי הוקטורים שפורשים את מרחב הפתרונות של המערכת בת"ל ופורשים ולכן מהווים בסיס למרבח הפתרונות של המערכת.

שאלה 2

מצאו בסיס למרחב הפתרונות של המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון

תחילה נמצא את מרחב הפתרונות של המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-3R_1\to R_4]{R_2+2R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}R_4\to R_4]{\frac{1}{3}R_3\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_4\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_3\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שיש משתנה אחד חופשי נסמן: $x_4=t$

נקבל:

$$x_3=0$$

$$x_2-x_4=0 \Rightarrow x_2=x_4 \Rightarrow x_2=t$$

$$x_1+3x_2-x_4=0 \Rightarrow x_1=-2t$$

ולכן נקבל שאוסף הפתרונות של המערכת הוא מהצורה:

$$\left\{\begin{pmatrix} -2t \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \middle| t\in R\right\}=\left\{t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t\in R\right\}=span\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

והרי הוקטורים שפורשים את מרחב הפתרונות של המערכת בת"ל ופורשים ולכן מהוות בסיס למרחב הפתרונות של המערכת.

שאלה 3

מצאו את המימד של המרחב הנפרש ע"י הוקטורים הבאים:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix},v_4=\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$$

פתרון

מכיוון שוקטורים אילו פורשים את המרחב. אזי נשאר לנו רק להפוך אותם לקבוצה בת"ל. ולכן נכנס למטריצה והשורות שלא מתאפסות הם יהיו הוקטורים הבת"ל שיהוו בסיס.

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\\7&9\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2-3R_1\to R_2\\R_3-5R_1\to R_3\\R_4-7R_1\to R_4}}\begin{pmatrix}1&2\\0&-2\\0&-4\\0&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{-1}{2}R_2\to R_2}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\0&-4\\0&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_3+4R_2\to R_3\\R_4+5R_2\to R_4}}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל כי הבסיס למרחב הנפרש ע"י וקטורים אילו הוא: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$ ולכן המימד הוא 2.

שאלה 4

מצאו את המימד של המרחב הנפרש ע"י הוקטורים הבאים:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},v_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},v_5=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},v_6=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

פתרון

מכיוון שוקטורים אילו פורשים את המרחב. אזי נשאר לנו רק להפוך אותם לקבוצה בת"ל. ולכן נכנס למטריצה והשורות שלא מתאפסות הם יהיו הוקטורים הבת"ל שיהוו בסיס.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_4-R_1\to R_4\\R_6-R_1\to R_6}}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\0&-1&-1&0\\0&1&0&0\\0&-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_4+R_2\to R_4\\R_5-R_2\to R_5\\R_6+R_2\to R_6}}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&-1&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_4-R_3\to R_4\\R_6-2R_3\to R_6}}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל כי הבסיס למרחב הנפרש ע"י וקטורים אילו הוא: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

ולכן המימד הוא 4.

שאלה 5

קבעו האם הקבוצות הבאות יכולות להוות בסיס למרחב הנתון.

א. $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ מרחב: R^3

ב. $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}, v_4=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ מרחב: R^2

פתרון

א. המימד של R^3 הוא 3 ויש רק שני וקטורים ולכן הם לא יכולים להיות בסיס

ב. המימד של R^2 הוא 2 ויש ארבע וקטורים ולכן הם לא יכולים להיות בסיס