משפט(משפט הפונקציה הסתומה)

תהי $\varphi \in C^p\left(W\right)$ כאשר $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ קבוצה פתוחה. נניח ש$\left(x_0, y_0\right) \in W$, $\varphi\left(x_0, y_0\right) = 0$, $\det\left(D_y \varphi\left(x_0, y_0\right)\right) \neq 0$. אזי קיימות סביבות U_{x_0} וV_{y_0} וקיימת פונקציה $y = f\left(x\right) : U_{x_0} \to V_{y_0}$, $f\left(x\right) \in C^p\left(U_{x_0}\right)$ כך שלכל $x \in U_{x_0}, y \in V_{y_0}$ מתקיים $\varphi\left(x, y\right) = 0$ אם ורק אם $y = f\left(x\right)$

הגדרה

יהיו $U, V \subset \mathbb{R}^n$ קבוצות פתוחות. תהי $f : U \to V$. אזי f נקראת C^p-דיפאמורפיזם אם $f \in C^p\left(U\right)$, f חח"ע ו$f^{-1} \in C^p\left(V\right)$.

משפט(משפט הפונקציה ההפוכה)

תהי $G \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. תהי $f : G \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^p\left(G\right)$. נניח ש$x_0 \in G$ ו$\nabla_f\left(x_0\right) \neq 0$. אזי קיימות סביבות U_{x_0} ו$V_{f(x_0)}$ כך ש$f : U_{x_0} \to V_{f(x_0)}$ היא C^p-דיפאמורפיזם.

הגדרה

יהיו $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$. העתקה $f : A \to B$ נקראת הומיאומורפיזם אם f רציפה, f חח"ע ו$f^{-1} : B \to A$ גם רציפה.

הגדרה

הקבוצה $E \subset A$ נקראת פתוחה בA אם לכל $x \in E$ קיימת סביבה של x בA המוכלת בE.

$$A \cap B_x$$

הערה: יכול להיות שE לא פתוחה במרחב כולו, אבל פתוחה בA - למשל
$$A = [0, 1]$$
$$E = \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

לכל קבוצה Ω פתוחה בA הקבוצה $f\left(\Omega\right)$ פתוחה בB.

הגדרה

תהי $W \subset \mathbb{R}^k$ ו$f : W \to \mathbb{R}^{n-k}$. הגרף של f היא קבוצה ב$\mathbb{R}^n$ מהצורה

$$\left\{\left(w, f\left(w\right)\right) | w \in W\right\}$$

אם f הפיכה אז

$$F:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$$

$$F(w)=(w,f(w))$$

$$F^{-1}:(w,f(w))\to W$$

משפט

יהיו $M\subset\mathbb{R}^n$, $a\in M$. נניח $1\le k<n$ ו-$p\in\mathbb{N}$. התכונות הבאות שקולות:

1. קיימת סביבה U_a וקיימת $g:U_a\to\mathbb{R}^{n-k}$ כזאת ש-$g\in C^p(U_a)$, $\operatorname{rank} g'(x)=n-k$ [1] לכל $x\in U_a$ ו-$M\cap U_a=\{x\in U_a|g(0)=0\}$
2. קיימת סביבה של a ב-M, $M\cap V_a$, כזאת שהיא הגרף של הפונקציה $f:W\to\mathbb{R}^{n-k}$ כאשר $W\subset\mathbb{R}^k$ פתוחה ו-$f\in C^p(W)$, כלומר

$$M\cap V_a=\{(w,f(x))|w\in W\}$$

3. קיימת סביבה של a ב-M, $M\cap G_a$, קבוצה פתוחה $\Omega\subset\mathbb{R}^k$ והומיאומורפיזם $F:\Omega\to M\cap G_a$ כזה ש-$F\in C^p(\Omega)$ ו-$\text{rank }F'(t)=k$ לכל $t\in\Omega$.

הגדרה

אם $a\in M\subset\mathbb{R}^n$ מקיימת אחת מהתכונות מהמשפט הנ"ל, אז נאמר ש-M משטח k-מימדי בסביבת הנקודה a השייך ל-C^p.

הגדרה

הקבוצה $M\subset\mathbb{R}^n$ נקראת משטח k מימדי השייך ל-C^p אם לכל נקודה $a\in M$ הקבוצה M היא משטח k-מימדי בסביבת הנקודה הזאת השייך ל-C^p.

הגדרה

משטח 1-מימדי נקרא עקום.

[1] g פונקציה וקטורית, ולכן $g'(x)$ היא מטריצה ויש לה דרגה.

הגדרה

הזוג (F,Ω) נקרא מפה מקומית של $M\cap G_a$.
האוסף של מפות (F_α,Ω_α) כזה ש$M=\bigcup\limits_{\alpha}F_\alpha\left(\Omega_\alpha\right)$ נקרא אטלס M.

הגדרה

אם לכל $a\in M$ מתקיימת תכונה 3 מהמשפט הנ"ל, כאשר $k=n$, אז M נקרא משטח n־מימדי.

דוגמאות

1. קבוצה פתוחה $G\subset\mathbb{R}^n$, משטח n מימדי $(F\left(x\right)=x,G)$.
2. ספירה ב$\mathbb{R}^n$:

$$S_{n-1}=\left\{x\middle|x_1^2+\cdots+x_n^2=1\right\}$$

משטח $(n-1)$ מימדי.

$$g\left(x\right)=x_1^2+\ldots x_n^2-1\qquad \text{grad }g=\left(2x_1,2x_2,\ldots 2x_n\right)$$

תיאור מעגל ע"י מפה

$$C=\left\{x^2+y^2=1\right\}$$

$$y=\sqrt{1-x^2},x\in(-1,1)$$

$$y=-\sqrt{1-x^2},x\in(-1,1)$$

$$x=\sqrt{1-y^2},y\in(-1,1)$$

$$x=-\sqrt{1-y^2},y\in(-1,1)$$

כלומר, בין אם משתמשים בx ובין אם y, אי אפשר לתאר מעגל ע"י מפה אחת. אנחנו צריכים כמה מפות ־ אטלס
ניתן גם לתאר באמצעות פרמטריזציה(למרות שזה לא מפה):

$$\gamma\left(t\right):I\to C$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\gamma\left(t\right)=\left(\cos t,\sin t\right)\\ t\in\left(-\pi,\pi\right)\end{array}}$$

למרות שאפשר גם לבחור:$t\in\left(0,2\pi\right)$

דוגמה ־ ספירה

$$S = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

$$r\left(u, v\right) = \left(\cos u \cdot \cos v, \sin u \cdot \cos v, \sin v\right)$$

אם בוחרים הצגה פרמטרית כזו, לא מכסים את כל הספירה:

$$u = 0 \qquad \left(\cos v, 0, \sin v\right), v \in \left(-\pi/2, \pi/2\right)$$

קו האורך($u = 0$) לא מכוסה.
ננסה מפות אחרות:

$$z = \sqrt{1 - \left(x^2 + y^2\right)}$$

$$z = -\sqrt{1 - \left(x^2 + y^2\right)}$$

כאן אנחנו לא מכסים את קו המשווה.
בסופו של דבר, אם רוצים לכסות את הכל צריך כמה מפות.

הוכחת המשפט

$\left(2\right) \Rightarrow \left(1\right)$

$$M \cap V_a = \left\{\left(w_1, \ldots w_k, f_1\left(w_1, \ldots w_k\right), \ldots f_{n-k}\left(w_1, \ldots w_k\right)\right)\right\}$$

$$x = \left(x_1, \ldots x_n\right) \in M \cap V_a$$

$$\boxed{x_{k+i} = f_i\left(x_1, ...x_k\right)}, \qquad 1 \le i \le n-k$$

$$g_i\left(x\right) = f_i\left(x_1, \ldots x_k\right) - x_{k+i}$$

$$g'\left(x\right) = \left(\begin{array}{c|c} f'\left(x\right) & I \\ \left(n-k\right) \times k & \left(n-k\right) \times \left(n-k\right) \end{array}\right)$$

$$\Omega = W$$

$$F\left(t_1, \ldots t_k\right) = \left(t_1, \ldots t_k, f_1\left(t_1, \ldots t_k\right), \ldots f_{n-k}\left(t_1, \ldots t_k\right)\right)$$