פתרון תרגיל בית 6 באלגברה מופשטת 1

88-211 סמסטר א' תשע"ו

1. הסתכלו בתרגיל הקודם ומצאו מיהן התת"ח הנורמליות של D_4.
פתרון: $\langle\sigma\rangle$,$\langle\sigma^2\rangle$, $\langle\tau,\sigma^2\rangle$

2. יהיו $H,K\leq G$ תת"ח.

(א) הוכיחו כי HK היא תת"ח אם ורק אם $HK=KH$ (כלומר שכל מכפלה מהצורה h_1k_1 שווה לאיזשהי מכפלה מהצורה k_2h_2 וכן להפך).
פתרון:
נקדים ונגדיר סימון: אם $G\supseteq X$ תת־קבוצה של חבורה G אז מסמנים

$$X^{-1}=\left\{x^{-1}|\,x\in X\right\}$$

.
אם X היא סתם תת־קבוצה, X^{-1} זו איזושהי תת־קבוצה אחרת מאותו גודל.
אם במקרה X היא תת־חבורה, אז $X^{-1}=X$ (סגירות להופכי) וגם $XX\subseteq X$ (סגירות לכפל, למעשה יש פה שיוויון).

$\Leftarrow$ מכיוון ש HK היא תת"ח אז היא סגורה להופכי ולכן $(HK)^{-1}=HK$.
מצד שני $(HK)^{-1}=K^{-1}H^{-1}=KH$ כי K,H הם תת"ח. קיבלנו ש $HK=KH$.
$\Rightarrow$ נראה סגירות לכפל: $HK\supseteq HHKK\overset{KH=HK}{=}HKHK$ ($H\supseteq HH$ כי Hהיא תת"ח, וכדומה עבור K).
סגירות להופכי: $(HK)^{-1}=K^{-1}H^{-1}=KH=HK$ (הצדיקו את כל המעברים פה).

(ב) הסיקו שאם $H\lhd G$ אז HK היא תת"ח.
פתרון:
אם $H\lhd G$ אז בפרט לכל $k\in K$ מתקיים $kH=Hk$ ולכן

$$KH=\bigcup kH=\bigcup Hk=HK$$

.

(ג) הוכיחו כי אם $H\lhd G$ וגם $K\lhd G$ אז $HK\lhd G$.
פתרון:
יהי $g\in G$, אזי

$$g(HK)=(gH)K=(Hg)K=H(gK)=H(Kg)=(HK)g$$

(יש להצדיק את המעברים!).

(ד) תנו דוגמא לשתי ת"ח שאינן נורמליות ומכפלתן היא ת"ח (רמז: חפשו בD_4).

פתרון:

ראיתם בשאלה הראשונה ש$\langle\tau\rangle$ו $\left\langle \tau\sigma^{2}\right\rangle$ הן לא ת"ח נורמליות, אבל המכפלה $\left\langle \tau\sigma^{2}\right\rangle \langle\tau\rangle=\left\{ id,\tau,\tau\sigma^{2},\sigma^{2}\right\}$ היא ת"ח.

3. הוכיחו כי אם $G \lhd N$ אזי $Z(N)=\{x\in N\,|\,\forall y\in N\,xy=yx\}$ היא תת־חבורה נורמלית של G.

פתרון:

צריך להוכיח שלכל $g\in G$ ולכל $x\in Z(N)$ מתקיים $gxg^{-1}\in Z(N)$.

כדי להראות את זה נוכיח שלכל $n\in N$ מתקיים $\left(gxg^{-1}\right)n\left(gxg^{-1}\right)^{-1}n^{-1}=e$ (למה זה שקול?).

$$\left(gxg^{-1}\right)n\left(gxg^{-1}\right)^{-1}n^{-1}=gx\left(g^{-1}ng\right)x^{-1}g^{-1}n^{-1}=g\left(g^{-1}ng\right)xx^{-1}g^{-1}n^{-1}=nn^{-1}=e$$

שימו לב ש $x\left(g^{-1}ng\right)=\left(g^{-1}ng\right)x$ כי x מתחלף עם כל איבר של N ו־ $g^{-1}ng\in N$ כי N היא תת־חבורה נורמלית.

4. תהי G חבורה. עבור איבר $a\in G$ הקבוצה $C_{a}=\{g\in G\,|\,ga=ag\}$ נקראת המרכז של a ב G. זו תת־חבורה (השתכנעו בכך).

(א) הוכיחו כי לכל חבורה G מתקיים: $Z(G)=\bigcap_{a\in G}C_{a}$.

פתרון:

$x\in Z(G)\iff xa=ax$ לכל $a\in G\iff x\in C_{a}$ לכל $a\in G\iff x\in\bigcap_{a\in G}C_{a}$.

(ב) מצאו חבורה G ואיברים $a,b\in G$ כך ש C_a ת"ח נורמלית, ו C_b ת"ח לא נורמלית.

פתרון:

נסתכל למשל ב D_3. קל לברר ש $C_{\tau}=\{id,\,\tau\}=\langle\tau\rangle$ שהיא, כפי שראינו בכיתה, לא תת־חבורה נורמלית.

ואילו $C_{\sigma}=\left\{ id,\,\sigma,\,\sigma^{2}\right\} =\langle\sigma\rangle$ שהיא, כפי שראינו בכיתה, תת־חבורה נורמלית.

5. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם או לא. אם כן, האם היא מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

(א) $f:\mathbb{C}^{\times}\to\mathbb{C}^{\times}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x^{-5}$.

זהו הומומורפיזם שכן לכל $x,y\in\mathbb{C}^{\times}$ מתקיים

$$f(xy)=(xy)^{-5}=x^{-5}y^{-5}=f(x)f(y)$$

.

על: שכן לכל $y\in\mathbb{C}^{\times}$, $y^{\frac{-1}{5}}\in\mathbb{C}^{\times}$ ומתקיים $f(y^{\frac{-1}{5}})=y$.

לא חח"ע: שכן למשל $f(1) = f\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right) = 1$ אבל $1 \neq e^{\frac{2\pi i}{5}}$.
ולכן f היא אפימורפיזם.

(ב) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ המוגדרת ע"י $f(a) = a \pmod{n}$.

זהו הומומו' שכן (כידוע) לכל $a, b \in \mathbb{Z}$:
$(a+b) \pmod{n} = (a \pmod{n} + b \pmod{n}) \pmod{n}$.
על: כי לכל $a \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ מתקיים $f(a) = a \pmod{n}$.
כמובן שזה לא חח"ע כי למשל $f(0) = f(5) = 0 \pmod{n}$ אבל $5 \neq 0$ ב$\mathbb{Z}$.
ולכן f היא אפימורפיזם.

(ג) G, H חבורות , $f : G \times H \to H \times G$ המוגדרת ע"י $f(g,h) = (h,g)$.

זהו הומומו' שכן לכל $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$ מתקיים
$f((g_1,h_1)(g_2,h_2)) = f((g_1g_2, h_1h_2)) = (h_1h_2, g_1g_2) = (h_1,g_1)(h_2,g_2) =$
$f((g_1,h_1))\, f((g_2,h_2))$.
קל לראות שזה על וחח"ע (השתכנעו בכך) ולכן זהו איזומורפיזם.

(ד) $f : S_7 \to \mathbb{Z}$ המוגדרת ע"י $f(\sigma) = \sigma(1)$.

זה לא הומומו' שכן למשל $f(Id \cdot Id) = f(Id) = Id(1) = 1$ אבל לעומת זאת $f(Id) + f(Id) = 1 + 1 = 2$. (אפשר גם לטעון: התמונה של הזהות היא לא אפס (לא אבר היחידה) ולכן זה לא יכול להיות הומומו').

(ה) $f : S_5 \to S_6$ המוגדרת כך:
עבור $\sigma \in S_5$, $f(\sigma)\colon \{1, 2, \dots, 6\} \to \{1, 2, \dots, 6\}$ פועלת באופן הבא
$f(\sigma)(i) = \begin{cases} \sigma(i) & 1 \le i \le 5 \\ 6 & i = 6 \end{cases}$.
הסבר אחר: אם $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) \end{pmatrix}$ אזי
$f(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) & 6 \end{pmatrix}$.

זהו הומומו'. יהיו $\sigma_1, \sigma_2 \in S_5$ נראה שמתקיים $f(\sigma_1\sigma_2) = f(\sigma_1)f(\sigma_2)$:
לפי ההגדרה (נשתמש בשנייה)
$f(\sigma_1\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \sigma_1\sigma_2(1) & \sigma_1\sigma_2(2) & \sigma_1\sigma_2(3) & \sigma_1\sigma_2(4) & \sigma_1\sigma_2(5) & 6 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \sigma_1(1) & \sigma_1(2) & \sigma_1(3) & \sigma_1(4) & \sigma_1(5) & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \sigma_2(1) & \sigma_2(2) & \sigma_2(3) & \sigma_2(4) & \sigma_2(5) & 6 \end{pmatrix} =$
$f(\sigma_1)f(\sigma_2)$.
זה לא על כי למשל $(16) \notin \mathrm{Im} f$ (למה?).
חח"ע: אם $f(\sigma) = Id$ אז $f(\sigma)(i) = i$ לכל $1 \le i \le 5$ ולפי ההגדרה זה אומר ש $\sigma(i) = i$. כלומר ש $\sigma = Id$.
סך הכל קיבלנו ש f היא מונומורפיזם.

(ו) עבור חבורה G ואיבר $x \in G$. $f: G \to G$ המוגדרת ע"י $f(g) = x^{-1}gx$.

זהו הומומו'. לכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים $f(g_1)f(g_2) = (x^{-1}g_1x)(x^{-1}g_2x) = x^{-1}g_1g_2x = f(g_1g_2)$

:

על: לכל $y \in G$ מתקיים $f\left(xyx^{-1}\right) = y$.

חח"ע: אם $x^{-1}gx = e$ אז אפשר לכפול מימין ומשמאל ולקבל ש $g = xex^{-1} = e$.

קיבלנו שf היא איזומורפיזם.

6. נתון $\varphi: G_1 \to G_2$ הומומורפיזם.

(א) הוכיחו שאם G_1 אבלית אזי $\mathrm{Im}\varphi$ היא ת"ח אבלית.

יהיו $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}\varphi$ (צ"ל: $y_1y_2 = y_2y_1$). מכיוון שהם בתמונה, זה אומר שקיימים $x_1, x_2 \in G_1$ כך ש $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$.

כעת, מכיוון ש G_1 אבלית, $x_1x_2 = x_2x_1$ וכך:

$$y_1y_2 = \varphi(x_1)\varphi(x_2) = \varphi(x_1) = \varphi(x_1x_2) = \varphi(x_2x_1) = \varphi(x_2)\varphi(x_1) = y_2y_1$$

(ב) הוכיחו כי φ חח"ע אם"ם $\ker\varphi = \{e_1\}$. כאשר e_1 היא היחידה של G_1.

$\Leftarrow$: ברור מתכונות ההומומורפיזם ש $e_1 \in \ker\varphi$. אם בשלילה היה עוד איבר בגרעין $a \neq e_1$ אז מהגדרת הגרעין $\varphi(a) = e_2 = \varphi(e_1)$ בסתירה לחח"ע.

$\Rightarrow$: נניח שעבור איברים $a, b \in G_1$ מתקיים $\varphi(a) = \varphi(b)$ (צ"ל ש $a = b$).

נכפול בהופכי של $\varphi(b)$ מימין, ומתכונות ההומומורפיזם נקבל:

$$\varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(ab^{-1}) = e_2$$

כלומר ש $ab^{-1} \in \ker\varphi = \{e_1\}$. מה שאומר ש$ab^{-1} = e_1$ ולכן $a = b$ כדרוש.

7. כמה הומומורפיזמים לא טריוויאלים (כלומר, לא כולל הומומורפיזם ששולח כל איבר ליחידה) יש $\varphi: \mathbb{Z}_6 \to S_3$? נמקו, ומצאו את הגרעין של כל הומומורפיזם כזה.

נשים לב שמספיק לקבוע מהי התמונה של האיבר היוצר $1 \in \mathbb{Z}_6$. ולכן כל תמונה **חוקית** של 1 תקבע לנו הומומורפיזם יחיד.

נדגים את זה במפורש על הומומורפיזם אחד: $\varphi(1) = (123)$ אזי

$$\varphi(2) = \varphi(1+1) = \varphi(1)\varphi(1) = (123)(123) = (132)$$

נשים לב ש$\varphi(1) = id$ זה ההומומו' הטריוויאלי, ולכן נשארנו עם $3! - 1 = 5$ הומומורפיזמים אפשריים.

כולם חוקיים כי בS_3 לכל איבר $\varphi(0) = \varphi(6) = \varphi(1 + \cdots + 1) = \varphi(1)^6 = id$ (לפי מסקנה מלגרנג).