

אנליזה מודרנית תש"ף - תרגיל 7

להגשה עד 30.12.19

שאלה 1

נתבונן בפונקציה $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ המוגדרת בקטע $[-1, 1]$. האם ל- f יש השתנות חסומה בקטע? האם f רציפה ליפשיץ בקטע?

שאלה 2

הסבירו בקצרה מדוע כל פונקציה בעלת השתנות חסומה היא מדידה בורל, על פי טענות שראינו בהרצאה ובתרגול.

שאלה 3

תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[a, b]$. הראו כי אם $a \leq c \leq b$ אז $T_a^b(f) = T_a^c(f) + T_c^b(f)$. הסיקו כי לכל חלוקה

$$P : a = x_0 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$$

מתקיים

$$T_a^b(f) = \sum_{k=1}^n T_{x_{k-1}}^{x_k}(f)$$

שאלה 4

תהיינה f, g פונקציות המוגדרות בקטע $[a, b]$, ויהי $c \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי:

$$1. T_a^b(f + g) \leq T_a^b(f) + T_a^b(g)$$

$$2. T_a^b(cf) = |c| T_a^b(f)$$