רכיבים קשירים בחזקה

בגרף $G=(V,E)$ מכוון, קבוצה $C\subseteq V$ היא רכיב קשיר בחזקה אם לכל זוג קודקודים $u,v\in C$ יש מסלול בין u לv וC היא קבוצה מקסימלית.
בהנתן גרף $G=(G,E)$, גרף רכיבים הקשירות $\left(V^{SCC},E^{SCC}\right)=G^{SCC}$ יהיה הגרף בו: 1

- V^{SCC} - לכל רכיב קשירות חזק C_i בG יהיה קודקוד V_i בV^{SEC}
- E^{SCC} - תהיה קשת (V_i,V_j) אם יש קשת מקודקוד ברכיב C_i לקודקוד ברכיב C_j.

אלגוריתם

1. נריץ DFS על הגרף G, ונקבל את זמני הסיום $f\left[v\right]$ של הקודקודים.
2. נחשב את G^T
3. נריץ DFS על G^T כשמתחילים מהקודקודים לפי סדר $f\left[v\right]$ יורד.
4. נחזיר את העצים שהתקבלו בסריקת DFS האחרונה. הקודקודים בכל עץ הם רכיב קשירות חזק.

נגדיר: $G^T=\left(V^T,E^T\right)$ כאשר $V^T=V$ ו$E^T=\{(u,v)|(v,u)\in E\}$

הערה

תמיד מסתכלים על זמני הסיום של הרצת הDFS הראשונה.

טענה 1

רכיב הוא קשיר חזק בG $\Leftrightarrow$ רכיב הוא קשיר חזק בG^T

טענה 2

בהינתן שני רכיבים קשירים חזק C,C' ו$u,v\in C$ ו$u',v'\in C'$ אם יש מסלול $u\to u'$, אז אין מסלול $v'\to v$

מסקנה

G^{SCC} הוא DAG - גרף מכוון ללא מעגלים(כי אם יש קשת, לא יכולה להיות הקשת ההפוכה)

הסבר לאלגוריתם

ניקח לדוגמה את הגרף(לאחר G^{SCC}):

$$\begin{tikzcd} ae \arrow[r] \arrow[dr] & bd \arrow[dr] & \\ & cf \arrow[r] & gh \end{tikzcd}$$

רואים שזמן הסיום הגבוה ביותר יהיה בa או e - כי יש מהם מסלולים לשאר הקודקוד-ים, ולשאר הקודקודים אין מסלולים אליהם(אחרת הם היו באותו רכיב קשירות חזק). נסתכל על הגרף ההפוך:

$$\begin{tikzcd}
ae & bd \arrow[l] & \\
 & cf \arrow[ul] & gh \arrow[l] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

אם נתחיל את הסריקה מa או e, אז נקבל רק את ae

ובצורה פורמלית

נגדיר עבור תת קבוצה $U \subseteq V$:

- זמן גילוי של הקבוצה U: $d\left[U\right]=\min\limits_{u\in U}\left\{d\left[u\right]\right\}$.
- זמן סיום של הקבוצה U: $f\left[U\right]=\max\limits_{u\in U}\left\{f\left[u\right]\right\}$

טענה 3

בהינתן שני רכיבים קשירים חזק C,C', $u\in C$ ו$u'\in C'$, אז אם יש קשת (u,u') אז $f\left(C\right)>f\left(C'\right)$

הוכחה

- נניח שהקודקוד הראשון מC לC' שהתגלה הוא מC. $d\left[C\right]<d\left[C'\right]$. נסמן אותו ב$x$ - $d\left[x\right]=d\left[C\right]$. כל שאר הקודקודים מ$C$ וC' עוד לא התגלו - הם לבנים - ויש לנו מסלול מx לכל אחד מהם. לפי משפט המסלול הלבן, הקודקודים מC וC' הם צאצאים של x, ולכן $f\left[x\right]=f\left[C\right]>f\left[C'\right]$(לכל הקודקודים $w\neq x$ בC,C' מתקיים $f\left[x\right]>f\left[w\right]$).
- נניח שהקודקוד הראשון שמתגלה הוא מC'. נסמן בy. מy אפשר להגיע לכל קודקודי C' כי C' רכיב קשיר חזק. לקודקודי C אי אפשר להגיע מy לפי טענה 2. ז"א שנסיים עם y, לפני שבכלל נגלה את קודקודי C. $f\left[y\right]=f\left(C'\right)$, $f\left(C'\right)<f\left(C\right) \Leftarrow f\left[y\right]<f\left(C\right)$

מסקנה

בגרף G^T בהנתן שני רכיבים קשירים חזק C,C' ויש קשת (u,v) כך ש$u\in C$ ו$v\in C'$, אזי $f\left(C\right)<f\left(C'\right)$

הוכחה

(הרכיבים הקשירים חזק בG וG^T הם זהים)

בהינתן הקשת $(u,v)\in E^T$ אז יש קשת $(v,u)\in E$ ומכיוון שרכיבי הקשירות חזק זהים אז לפי טענה 3 $f\left(C\right)<f\left(C'\right) \Leftarrow u\in C \Leftarrow v\in C'$

טענה

האלגוריתם מזהה נכון רכיבים קשירים חזק

הוכחה

באינדוקציה על העצים שמתקבלים מהרצת DFS השניה

עץ פורש מינימלי - MST

$G=(V,E)$, $w:E\to\mathbb{R}$, $w(e)$: $e\in E$ - פונקציית שנותנת משקל לכל קשת בגרף.

הגדרות

תת קבוצה A של E תקרא קבוצה מבטיחה אם קיים T MST המכיל את A. אם A קבוצה מבטיחה ו$e\notin A$, e היא קשת בטוחה אם $A\cup\{e\}$ היא קבוצה מבטיחה

אלגוריתם

1. $A\leftarrow\emptyset$
2. כל עוד A היא לא עץ פורש:
   2.1 מוציאים קשת בטוחה e ביחס לA
   2.2 $A\leftarrow A\cup\{e\}$
3. החזר A

טענה

האלגוריתם נותן קבוצה מבטיחה.

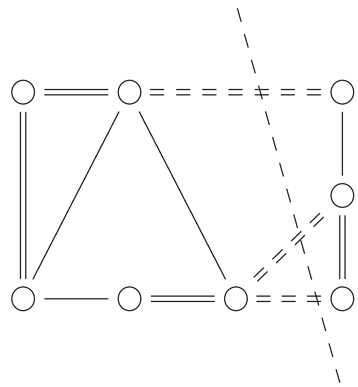
הוכחה - באינדוקציה על A

נניח A קבוצה מבטיחה, ומצאנו קשת e בטוחה. אז $A\cup\{e\}$ מבטיחה לפי הגדרה.
תמיד(עד שנקבל עץ פורש) נוכל למצוא קשת בטוחה, כי יש MST המכיל את A, וקשתות בMST הזה

הגדרות

- חתך(V_1,V_2)בגרף $G=(V,E)$ היא חלוקה של הקודקודים ל2 קבוצות זרות ולא ריקות, $V_1\cup V_2=V$.
- קשת e תקרא חוצה את החתך אם היא מחברת קודקוד בV_1 לקודקוד בV_2.
- החתך מכבד קבוצת קשתות A, אם אין בA קשת החוצה את החתך.
- קשת e תקרא חוצה קלה אם משקלה מינימאלי מבין הקשתות החוצות.

דוגמה



הקו המקוקו(--) הוא החתך. הקשתות הכפולות-מקוקות(==) הן חוצות. הקשתות הכפולות-רציפות(=) הן קבוצת קשתות שהחתך מכבד

טענה

תהא A קבוצה מבטיחה ויהי (V_1, V_2)חתך המכבד אותה. נניח ש$e=(u,v)$ היא קשת קלה החוצה את החתך. אז e היא קשת בטוחה עבור A

הוכחה

A היא קבוצה מבטיחה, אז קיים T MST המכיל אותה. אם $e \in T$ $\Leftarrow$סיימנו.
(נשים לב ש$e \notin A$ כי e חוצה את החתך והחתך מכבד את A)
נניח ש$e \notin T$. נוסיף אותה לT: $T \cup \{e\}$

קיבלנו שב$T \cup \{e\}$ יש מעגל. בT יש קשת e' שחוצה את החתך. נסתכל ב$T' = T - \{e'\} \cup \{e\}$. מקבלים ש$T'$ הוא עץ פורש, כי הוא עץ ויש בו $|V|-1$ קשתות. ידוע ש$w(e) \le w(e')$ כי e חוצה קלה.

$$w(T') = w(T) - w(e') + w(e) \le w(T)$$

$\Leftarrow$ יצרנו עץ פורש מינימלי חדש. e היא קשת בטוחה כי T' מכיל אותה ומכיל את A.