פתרון תרגיל בית 7 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1 (חימום)**.** יהיו $f\colon G\to H$ ו-$g\colon H\to K$ הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו שההרכבה $g\circ f\colon G\to K$ היא הומומורפיזם.

פתרון. נתון שלכל $g_1,g_2\in G$ מתקיים $f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2)$, ושלכל $h_1,h_2\in H$ מתקיים $g(h_1h_2)=f(h_1)f(h_2)$. בפרט זה נכון עבור $h_i=f(g_i)$. לכן לכל $g_1,g_2\in G$ מתקיים

$$(g\circ f)(g_1g_2)=g(f(g_1g_1))=g(f(g_1)f(g_1))=g(f(g_1))g(f(g_1))=(g\circ f)(g_1)(g\circ f)(g_2)$$

ולכן $g\circ f$ הומומורפיזם.

ודאו שאתם יודעים לנסח טענות דומות לאפימורפיזמים, מונומורפיזמים ואיזומורפיזמים.

שאלה 2. תהיינה G,H חבורות ויהי $f\colon G\to H$ הומומורפיזם. הוכיחו: f חח"ע אם ורק אם $\ker f=\{e_G\}$.

פתרון.

לכיוון הראשון, נניח שההומומורפיזם f חח"ע. f הומומורפיזם ולכן $f(e_G)=e_H$. מהחח"ע של f נובע ש-e_G הוא האיבר היחיד ששנשלח ל-e_H, ולכן $\ker f=\{e_G\}$.

לכיוון השני, נניח כי $\ker f=\{e_G\}$. נניח שעבור g_1,g_2 מתקיים $f(g_1)=f(g_2)$, ונרצה להראות שגם $g_1=g_2$. אם כן, $f(g_1)f(g_2)^{-1}=e_H$ ומכיוון שזהו הומומורפיזם מתקיים: $f(g_1g_2^{-1})=e_H$. לכן $g_1g_2^{-1}\in\ker f$ ומהנתון נקבל $g_1g_2^{-1}=e_G$, ולכן $g_1=g_2$. כלומר f חח"ע.

שאלה 3. יהי $f\colon G\to H$ הומומורפיזם.

א. הוכיחו שאם G אבלית, אז גם $\operatorname{im} f$ אבלית. הפריכו את הכיוון השני.

ב. הסיקו מהסעיף הקודם שאם $H\cong G$, אז G אבלית אם ורק אם H אבלית.

ג. הוכיחו או הפריכו: קיים מונומורפיזם $\varphi\colon\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\to S_4$.

פתרון.

א. לכל $h_1,h_2\in\operatorname{im} f$ קיימים $g_1,g_2\in G$ כך ש-$f(g_i)=h_i$. נחשב

$$h_1h_2=f(g_1)f(g_2)\overset{\star}{=}f(g_1g_2)\overset{*}{=}f(g_2g_1)\overset{\star}{=}f(g_2)f(g_1)=h_2h_1$$

כאשר בשיוויון המסומן $*$ השתמשנו באבליות של G, ובשיוויונות המסומנים $\star$ השתמשנו בכך ש-f הומומורפיזם. כלומר כל זוג איברים ב-$\operatorname{im} f$ מתחלפים, ולכן $\operatorname{im} f$ אבלית. כדי להפריך חייבים לבחור חבורה לא אבלית. אנחנו נבחר את $G=S_3$. עבור H אפשר לבחור כל חבורה. למשל $H=\mathbb{Z}_5$. אז עבור ההומומורפיזם הטריוויאלי $f\colon S_3\to\mathbb{Z}_5$ השולח כל איבר ל-0, נקבל $\operatorname{im} f=\{0\}$. כמובן שזו חבורה אבלית, אבל S_3 לא.

ב. אם חבורות הן איזומורפיות, אז יש בינהן איזומורפיזם. נניח $\phi\colon G \to H$ הוא איזומורפיזם. לכן ϕ הוא על, כלומר $\operatorname{im}\phi = H$. אם G היא אבלית, אז גם H היא אבלית לפי הסעיף הקודם. באופן דומה יש איזומורפיזם $\phi^{-1}\colon H \to G$ ולכן אם H אבלית, אז גם G אבלית.

ג. שתי החבורות הן מסדר 24. לכן אם קיימת פונקציה חח"ע בינהן, אז היא גם על. כלומר אילו קיים φ מונומורפיזם כזה, אז הוא גם איזומורפיזם. אבל S_4 לא אבלית ואילו $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ היא אבלית ולפי הסעיף הקודם נגיע לסתירה.

שאלה 4. יהי p ראשוני. חבורה נקראת חבורת-p אם הסדר של כל איבר הוא חזקה כלשהי של p.

יהי $f\colon G \to H$ הומומורפיזם. הוכיחו שאם G היא חבורת-p, אז גם $\operatorname{im} f$ היא חבורת-p. הפריכו את הכיוון השני.

פתרון. לכל $h \in \operatorname{im} f$ קיים $g \in G$ כך ש-$h = f(g)$. לפי תרגיל שעשינו בכיתה $o(f(g))|o(g)$ ולפי הנתון $o(g)$ הוא חזקה של p. לכן גם הסדר של $f(g)$ הוא חזקה של p. כלומר $\operatorname{im} f$ היא חבורת-p.

כדי להפריך את הכיוון השני, אפשר לבחור את ההומומורפיזם הטריוויאלי עבור חבורות מתאימות, אבל ננסה משהו אחר. נבחר $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ואת $H = \mathbb{Z}_3$. עבור ההומומורפיזם נבחר את ההטלה $f\colon G \to H$ לפי $f((a,b)) = b$. התמונה היא חבורת-3, למעשה $\operatorname{im} f = H$. אבל G מסדר 6, שאינו חזקה של ראשוני, ולכן יש בה איברים מסדר 2 ומסדר 3 ואילו חבורת-p סופית היא תמיד מסדר חזקה של p.

שאלה 5. עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

א. $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^{-3}$.

ב. $f\colon \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^2$.

ג. $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^+$ המוגדרת לפי $f(x) = x^4$ כאשר $\mathbb{R}^+$ זו חבורת המספרים הממשיים החיוביים עם כפל רגיל.

ד. $f\colon S_7 \to \mathbb{Z}$ המוגדרת לפי $f(\sigma) = \sigma(1)$.

ה. $f_x\colon G \to G$ המוגדרת לפי $f_x(g) = xgx^{-1}$ כאשר G חבורה ו-$x \in G$ איבר.

ו. $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ המוגדרת לפי $f(k) = ([k],[k])$.

ז. $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ המוגדרת לפי $f(n) = (n \bmod 3,\, n \bmod 6)$.

ח. $f\colon S_6 \to U_7 \times U_{11}$ המוגדרת לפי $f(\sigma) = (\sigma(1), \sigma(2))$.

פתרון. ההוכחות כאן לא מלאות!

א. הפונקציה היא אפימורפיזם, אבל לא מונומורפיזם. למשל $f(1) = f(e^{\frac{2\pi i}{3}}) = 1$.

ב. הפונקציה f היא הומומורפיזם. אבל היא לא מונומורפיזם כי למשל $f(1) = f(-1) = 1$. היא גם לא אפימורפיזם, כי למשל $-1 \notin \operatorname{im} f$, שהרי לכל $x \in \mathbb{Q}^*$ מתקיים $x^2 > 0$.

ג. הפונקציה f היא הומומורפיזם, באופן דומה לסעיף הקודם. אבל היא לא מונומורפיזם, שוב, כי למשל $f(1) = f(-1) = 1$. הפעם היא כן אפימורפיזם, כי לכל $x \in \mathbb{R}^+$ קיים שורש רביעי $\sqrt[4]{x} \in \mathbb{R}^*$ שהוא ממשי שאינו אפס, ואז $f(\sqrt[4]{x}) = x$.

ד. הפונקציה הזו היא לא הומומורפיזם. למשל

$$f(\mathrm{id}\cdot\mathrm{id}) = 1 \neq 1 + 1 = f(\mathrm{id}) + f(\mathrm{id})$$

ה. הפונקציה הזו היא איזומורפיזם. סוג כזה של איזומורפיזם נקרא אוטומורפיזם פנימי. נראה שאכן מדובר בהומומורפיזם:

$$f_x(gh) = xghx^{-1} = xgx^{-1}xhx^{-1} = f_x(g)f_x(h)$$

נעזר בשאלה 2 כדי לראות ש-f_x הוא חח"ע. אם $xgx^{-1} = e$, אז $g = x^{-1}ex$ ולכן $g = e$. כלומר $\ker f_x = \{e\}$. כדי להראות ש-f_x הוא על, לכל $h \in G$ נתבונן באיבר $x^{-1}hx$, שהוא אכן מקור עבורו כי $f_x(x^{-1}hx) = h$.

ו. פונקציה זו היא אכן הומומורפיזם. עם זאת, היא לא אפימורפיזם (אלא אם $n = 1$ ואז זה ברור. לאיבר $([0], [1])$ למשל אין מקור) ולא מונומורפיזם (למשל $f(k) = f(k+n)$).

ז. הפונקציה היא הומומורפיזם, כשההוכחה מסתמכת על כך שחיבור מודולו n מוגדר היטב. היא לא מונומורפיזם, כי הסדר של המקור גדול ממש מסדר התמונה, או למשל כי $f(0) = f(6) = ([0], [0])$. היא לא אפימורפיזם, כי $\mathbb{Z}$ ציקלית ואילו $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ לא ציקלית, וכל התמונות של חבורה ציקלית הן ציקליות. אפשר גם להוכיח ישירות כי למשל $(1, 3) \notin \operatorname{im} f$: אם n נשלח ל-$(1, 3)$, אז לפי הרכיב השני $n \equiv 3 \pmod 6$, ונסיק $n \equiv 0 \pmod 3$. לא יתכן שבאותו הזמן גם $n \equiv 1 \pmod 3$.

ח. הפונקציה הזו היא לא הומומורפיזם. למשל כי היחידה לא נשלחת ליחידה, או ש-$f(\mathrm{id} \cdot \mathrm{id}) \neq f(\mathrm{id})f(\mathrm{id})$. בפרט זה לא מונומורפיזם או אפימורפיזם.

שאלה 6. תהי G חבורה. נגדיר $f\colon G \to G$ לפי $f(g) = g^2$.

א. הוכיחו שהפונקציה f היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית.

ב. נניח שהחבורה G אבלית וסופית. הוכיחו שהפונקציה f היא איזומורפיזם אם ורק אם הסדר של G הוא אי-זוגי.

פתרון.

א. לכיוון הראשון, נניח שהחבורה G אבלית. יהיו $g, h \in G$. לכן

$$f(gh) = (gh)^2 = ghgh = g^2h^2 = f(g)f(h)$$

ולכן f הומומורפיזם. לכיוון השני, נניח ש-f הומומורפיזם. לכל $g, h \in G$ מתקיים $f(gh) = (gh)^2 = ghgh$ וגם $f(gh) = f(g)f(h) = g^2h^2$, כלומר $g^2h^2 = ghgh$. נצמצם ונקבל: $gh = hg$, כלומר G אבלית.

ב. לכיוון הראשון, נניח שהחבורה מסדר אי-זוגי. מכיוון שהפונקציה היא הומומורפיזם (לפי הסעיף הראשון) והחבורה סופית, מספיק להראות שהפונקציה חח"ע. לשם כך יש להסביר מדוע הגרעין הוא טריוויאלי. נניח בשלילה שקיים $g \in \ker f$ המקיים $g \neq e_G$. מהגדרת הפונקציה, $e_G = f(g) = g^2$, ולכן הסדר של g הוא 2. הסדר של g מחלק את הסדר של החבורה ולכן הסדר של החבורה הוא זוגי בסתירה להנחה.
בכיוון השני, נניח כי f היא איזומורפיזם. נניח בשלילה שהסדר של החבורה הוא זוגי, לכן יש איבר מסדר 2 (כפי שראינו בתרגול) ולכן f אינה חח"ע, כי האיבר הזה ואיבר היחידה שניהם בגרעין, שזו סתירה.

שאלה 7 (ממבחן)**.** תהי G חבורה, ויהיו $a, b \in G$ איברים לא טריוויאלים (כלומר שונים מאיבר היחידה) המקיימים $aba^{-1} = b^2$.

א. הוכיחו כי $a^5ba^{-5} = b^{32}$.

ב. נניח כי $o(a) = 5$. מצאו את $o(b)$.

פתרון.

א. נשים לב כי $2^5 = 32$ ונציב חמש פעמים את הנתון:

$$\begin{aligned} b^{32} &= \left(b^2\right)^{16} = \left(aba^{-1}\right)^{16} = aba^{-1}aba^{-1}\ldots aba^{-1} = ab^{16}a^{-1} = \\ &= a\left(b^2\right)^8 a^{-1} = a^2\left(b^2\right)^4 a^{-2} = a^3\left(b^2\right)^2 a^{-3} = a^4b^2a^{-4} = a^5ba^{-5} \end{aligned}$$

ב. לפי הנתון $a^5 = e$, ולכן גם $a^{-5} = e$. נעזר בסעיף הקודם ונקבל $b = a^5ba^{-5} = b^{32}$. לכן $b^{31} = e$. כלומר הסדר של b מחלק את 31. מפני ש-31 ראשוני, הסדרים האפשריים הם 1 או 31. לפי הנתון, b אינו איבר היחידה (שהוא האיבר היחיד מסדר 1), ולכן בהכרח $o(b) = 31$.

בהצלחה!