שיעורי בית 4

1. הוכח/הפרך כי H היא ת"ח של G במקרים הבאים

פתרון : זיכרו שבשביל להראות כי $G \subseteq H$ תת חבורה צריך להראות ש

- איבר היחידה שייך ל H כלומר $e \in H$
- לכל $h_1h_2 \in H$ מתקיים כי $h_1h_2^{-1} \in H$

(א) $H = \{a + ai \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C} = G$ (הפעולה היא חיבור מספרים מרוכבים)

פתרון : ת"ח כי $a+ai, b+bi \in H$ אזי $(a+ai)-(b+bi) = a-b+(a-b)i \in H$ בנוסף איבר היחידה $0 \in H$ (הוא מתקבל אם ניקח $a = 0$)

(ב) $H = m\mathbb{Z}_n = \{mz \mid z \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq \mathbb{Z}_n = G$ (הפעולה היא חיבור מודלו n)

פתרון : ת"ח כי $mz_1, mz_2 \in H$ אזי $mz_1 - mz_2 = m(z_1 - z_2) \in H$ בנוסף איבר היחידה $0 \in H$ (הוא מתקבל עבור $z = 0$)

(ג) $H = \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid |A| \neq 0\} \subseteq \mathbb{F}^{n\times n} = G$ (הפעולה היא חיבור מטריצות)

פתרון : לא ת"ח כי $I, -I \in H$ אבל $I - I = 0 \notin H$

(ד) תהא G חבורה ו $n \in \mathbb{N}$. $H = \{g^n | \, g \in G\}$ (הפעולה היא הפעולה של G)

פתרון : לא. למשל $G = S_3$. ו $n = 3$ אזי $H = \{id, (1,2), (2,3), (13)\}$ אינה ת"ח כי אין סגירות.

(ה) תהא G חבורה חילופית ו $n \in \mathbb{Z}$. $H = \{g^n | \, g \in G\}$ (הפעולה היא הפעולה של G)

פתרון : ת"ח כי $g_1^n, g_2^n \in H$ אזי $g_1^n (g_2^n)^{-1} = g_1^n \left(g_2^{-1}\right)^n = \left(g_1 g_2^{-1}\right)^n \in H$ כאשר המעבר האחרון נכון בגלל ש H חילופית. בנוסף $e^n = e \in H$

(ו) $H = \{x^2 \mod 4 | x \in \mathbb{Z}_4\} \subseteq \mathbb{Z}_4$ (הפעולה היא חיבור מודלו 4)

פתרון : נחשב מפורש $0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 0, 3^2 = 1$ ולכן

$$H = \{0, 1\}$$

ולכן H אינה תת חבורה כי $1 + 1 = 2 \notin H$ ואין סגירות לחיבור

(ז) $H=\{x^3 \mod 5 | x\in\mathbb{Z}_5\}\subseteq\mathbb{Z}_5$ (הפעולה היא חיבור מודלו 5)

פתרון : נחשב מפורש $0^3=0, 1^3=1, 2^3=3, 3^3=2, 4^3=4$ ולכן

$$H=\{0,1,3,2,4\}$$

כלומר H שווה לכל $\mathbb{Z}_5$ ולכן תת חבורה.

(ח) $H=\left\{\frac{a}{b}\,|\,a\in\mathbb{Z},\, b\in\mathbb{N},\, \frac{b}{4}\in\mathbb{N}\right\}\subseteq\mathbb{Q}$ (הפעולה היא חיבור מספרים רציונאליים)

פתרון : זוהי תת חבורה כי H אינה ריקה. בנוסף:

$$\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}=\frac{b'a-ba'}{bb'}$$

עבור $\frac{a}{b},\frac{a'}{b'}\in H$ נקבל ש 4 מחלק את b,b' ובפרט את bb' ולכן גם

$$\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}=\frac{b'a-ba'}{bb'}\in H$$

(ט) $G=GLn(\mathbb{F})=\{A\in\mathbb{F}^{n\times n}:\det(A)\neq 0\}$ חבורת המטריצות ההפיכות $H=SL_n(\mathbb{F})=\{A\in\mathbb{F}^{n\times n}:\det(A)=1\}$ (הפעולה היא כפל מטריצות) המטריצות עם דטרמיננטה שווה 1.

פתרון : זוהי תת חבורה כי $I\in H$ (כי $\det(I)=1$) . בנוסף: לכל $A,B\in H$ (כלומר $\det(A)=\det(B)=1$) נקבל מכפליות הדט' כי

$$\det(AB^{-1})=\det(A)\det(B^{-1})=\det(A)\frac{1}{\det(B)}=1\cdot\frac{1}{1}=1$$

ולכן $AB^{-1}\in H$.

2. כתבו את כל תתי החבורות של $G=S_3$.

פתרון : נחשב ישירות: תהא H תת חבורה של G

אם $(1,2),(2,3)\in H$ אזי $(1,2))(1,3)=(1,2,3)\in H$ וגם $(1,2)(1,3)(1,2)=$ $(2,3)\in H$ ואז גם $(1,2,3)^2=(1,3,2)\in H$ ולכן $H=S_3$

אם $(1,2)\in H$ ו $(2,3)\notin H$ אזי נקבל שגם אין איבר אחר מחישובים ישירים ולכן $H=\{id,(1,2)\}$

אם $(2,3)\in H$ ו $(1,2)\notin H$ אזי $H=\{id,(2,3)\}$

אם $(2,3)\notin H$ ו $(1,2)\notin H$ אז: אם $(1,2,3)\in H$ או $(1,3,2)\in H$ אז $H=\{id,(1,2,3),(1,3,2)\}$

ואחרת $H=\{id\}$

3. לכל $\sigma \in S_n$ נגדיר $\sigma(I) \in \mathbb{F}^{n\times n}$ להיות מטריצה $n\times n$ שמתקבלת ממטריצת היחידה ע"י הפעלת התמורה על השורות. כלומר

$$R_i(\sigma(I)) = e_{\sigma^{-1}(i)}$$

כאשר $R_i(\sigma(I))$ מסמל את השורה ה i ית של המטריצה $\sigma(I)$.
למשל אם $\sigma = (1,2,4) \in S_4$ [$\Leftarrow$ $\sigma^{-1} = (4,2,1)$] אזי

$$\sigma(I) = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & e_4 & - \\ - & e_1 & - \\ - & e_3 & - \\ - & e_2 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & e_{\sigma^{-1}(1)} & - \\ - & e_{\sigma^{-1}(2)} & - \\ - & e_{\sigma^{-1}(3)} & - \\ - & e_{\sigma^{-1}(4)} & - \end{pmatrix}$$

במילים אחרות. הוקטור e_i (ששוה לשורה ה i ית של I) עובר לשורה $\sigma(i)$.
הוכיחו כי $H = \{\sigma(I) \,:\, \sigma \in S_n\}$ תת חבורה של $GLn(\mathbb{F}) = \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} : \det(A) \neq 0\}$ המטריצות ההפיכות (שימו לב שהפעולה היא כפל מטריצות) .

פתרון : זוהי תת חבורה כי H אינה ריקה. כי $I \in H$ (אם ניקח את $\sigma = id$ אזי $\sigma(I) = I$)

עבור $\sigma_1(I), \sigma_2(I) \in H$ מתקיים כי

$$R_i\left(\sigma_1(I)\cdot\sigma_2(I)\right) = R_i\left(\sigma_1(I)\right)\cdot\sigma_2(I) = e_{\sigma_1^{-1}(i)}\cdot\sigma_2(I) = R_{\sigma_1^{-1}(i)}(\sigma_2(I)) = e_{\sigma_2^{-1}\left(\sigma_1^{-1}(i)\right)} = e_{(\sigma_1\sigma_2)^{-1}(i)} = R_i(\sigma_1\sigma_2(I$$

ולכן

$$\sigma_1(I)\cdot\sigma_2(I) = \sigma_1\sigma_2(I) \in H$$

ולכן יש סגירות לחיבור. בשביל סגירות להופכי נשתמש במה שהוכחנו. אכן: יהא $\sigma(I) \in H$ אזי

$$\sigma(I)\cdot\sigma^{-1}(I) = \sigma\sigma^{-1}(I) = I$$

ולכן ההופכי של $\sigma(I)$ הוא $\sigma^{-1}(I) \in H$

4. תהא G עם $n > 2$ איברים. הוכח כי לא קיימת $H \leq G$ עם $n-1$ איברים.

פתרון : נניח בשלילה כי קיימת $H \leq G$ עם $n-1$ איברים. אזי קיים איבר יחיד $g \in G\backslash H$.

כיוון שב H יש לפחות 2 איברים אזי קיים $e \neq h \in H$. בנוסף $gh \in H$ כי $gh \neq g$ (אם $gh = h$ אז $g = e$ ע"י הכפלת h^{-1} משמאל). אבל Hת"ח ולכן קיים $h^{-1} \in H$ וגם מתקיים סגירות $g = (gh)\,h^{-1} \in H$. סתירה

5. תהא G חבורה. $H_1, H_2 \leq G$ תתי חבורות. אזי $H_1 \cap H_2$ גם כן חבורה.

פתרון : כיוון ש $e \in H_1$ וגם $e \in H_2$ (כי אלו תתי חבורות) אז $e \in H_1 \cap H_2$. בנוסף, לכל $h, h' \in H_1 \cap H_2$ מתקיים כי $h, h' \in H_1$ וגם $h, h' \in H_2$ ובגלל שהם תתי חבורות מתקיים

כי $h\left(h'\right)^{-1} \in H_1$ וגם $h\left(h'\right)^{-1} \in H_2$ ולכן $h\left(h'\right)^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

6. תהא G חבורה $H_1, H_2 \leq G$ הוכח כי

$$[H_1 \subseteq H_2 \vee H_2 \subseteq H_1] \iff [H_1 \cup H_2 \leq G]$$

פתרון : הכיוון $(\Rightarrow)$ טריוואלי. נוכיח את הכיוון $(\Leftarrow)$: נניח בשלילה כי $[H_1 \cup H_2 \leq G]$ אבל $H_1 \nsubseteq H_2 \wedge H_2 \nsubseteq H_1$

אזי קיימים $h_1 \in H_1 \backslash H_2$, $h_2 \in H_2 \backslash H_1$. כיוון ש $h_1, h_2 \in H_1 \cup H_2$ אזי גם $h_1 + h_2 \in H_1 \cup H_2$ כי מניחים כי זוהי ת"ח.

כעת מהגדרת איחוד נובע כי $h_1 + h_2 \in H_1$ או $h_1 + h_2 \in H_2$. בה"כ $h_1 + h_2 \in H_1$. כיוון ש $h_1 \in H_1$ אזי גם $-h_1 \in H_1$ ואז $h_2 = (h_1 + h_2) + (-h_1) \in H_1$ כי H_1 חבורה . סתירה לכך ש $h_2 \notin H_1$.