בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה 88-195 מרצים: מר שי סרוסי וד"ר אלי בגנו.

סמסטר קיץ תשס"ח – מועד א. אלול תשס"ח

משך המבחן: שלש שעות.

הוראות הפעלה:

במבחן שני חלקים. **בחלק הראשון עליכם לענות על 2 שאלות מתוך 3**. משקל כל שאלה 20 נקודות. **שימו לב: ההוכחות בחלק זה חייבות להיות מתמטיות. אין לספר סיפורים.**

בחלק השני עליכם לצבור 60 נקודות (מתוך 76 אפשריות). פעלו לפי ההנחיות בגוף השאלות.

כל התשובות בדפים. המחברת משמשת לטיוטה בלבד.

סימונים: $N = \{1,2,3,...\}$.

על שאלה זו עליכם לענות בצורה מסודרת ומפורטת בדף זה !!!

<u>שאלה 1</u>

יהיו A,B,C קבוצות. הוכיחו או הפריכו **בלי שימוש בטבלאות אמת** כל אחת מן הטענות הבאות:

א. אם $A\not\subseteq B\cap C$ אז $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)\neq\varnothing$. *(6 נקודות).*

ב. אם $A\subseteq B$ אז $A\cup(B-A)=B$. *(6 נקודות).*

ג. אם $A\cap B=\varnothing$ אז $P(A)\cap P(B)=\{\varnothing\}$. *(8 נקודות).*

פתרון:

א. הטענה אינה נכונה. נקח $A=\{1,2,3\},B=\{4\},C=\{1,2,3\}$. אז $B\cap C=\varnothing$, לכן $A\not\subseteq B\cap C$. אבל $A\setminus B=\{1,2,3\}$, $A\setminus C=\varnothing$ ולכן $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=\varnothing$.

ב. נניח ש $A\subseteq B$. יש להוכיח:

1. $B\subseteq A\cup(B-A)$.

2. $A\cup(B-A)\subseteq B$.

הוכחת 1: יהי $x\in B$. אם $x\in A$ אז עפ״י הגדרת האיחוד, $x\in A\cup(B-A)$ וגמרנו. אחרת, $x\notin A$, אבל כיון ש $x\in B$ הרי $x\in B-A$ ושוב עפ״י הגדרת האיחוד, $x\in A\cup(B-A)$ וגמרנו. שימו לב שבחלק זה לא השתמשנו בנתון, לכן תמיד נכון ש $B\subseteq A\cup(B-A)$.

הוכחת 2: יהי $x\in A\cup(B-A)$. אז $x\in A$ או $x\in B-A$. אם $x\in A$ אז עפ״י הנתון, $x\in B$ (כי $A\subseteq B$) וגמרנו. אם $x\in B-A$ אז ודאי ש $x\in B$ ושוב גמרנו.

ג. נניח ש $A\cap B=\varnothing$. יש להוכיח:

1. $P(A)\cap P(B)\subseteq\{\varnothing\}$.

2. $\{\varnothing\}\subseteq P(A)\cap P(B)$.

הוכחת 1:

יהי $X \in P(A) \cap P(B)$. אז $X \in P(A)$ וגם $X \in P(B)$. לכן $X \subseteq A$ וגם $X \subseteq B$ ולכן $X \subseteq A \cap B = \varnothing$. לכן $X \subseteq \varnothing$. מצד שני תמיד $\varnothing \subseteq X$ ולכן $X = \varnothing$ ומכאן ש $X \in \{\varnothing\}$.

הוכחת 2 :

נניח ש $X \in \{\varnothing\}$. אז $X = \varnothing$. לכן $X \subseteq A, X \subseteq B$ ומכאן ש $X \in P(A)$ ו $X \in P(B)$ ולכן $X \in P(A) \cap P(B)$.

על שאלה זו עליכם לענות בצורה מסודרת ומפורטת בדף זה !!!

שאלה 2

מהו מספר התוצאות האפשריות להטלת 10 קוביות שונות (לכל קוביה 6 פאות הממוספרות מ-1 עד 6), כך שסכום התוצאות הוא 25?

פתרון:

נפתור באמצעות עקרון ההכלה והדחה. נשים לב כי הבעיה שקולה לבעיה הבאה (משתנה x_i מייצג את התוצאה של הקוביה ה- i):

מהו מספר הפתרונות בשלמים חיוביים למשוואה:
$x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 25$
כאשר $1 \le x_i \le 6$, $i = 1,\ldots,10$.

בעיה זו שקולה לבעיה (לדוגמא ע"י החלפת משתנים $y_i = x_i - 1$):

מהו מספר הפתרונות בשלמים חיוביים למשוואה:
$y_1 + y_2 + \ldots + y_{10} = 15$
כאשר $0 \le y_i \le 5$, $i = 1,\ldots,10$.

נגדיר:

A_i - קבוצת הפתרונות כך ש $y_i > 5$ (ז"א - $y_i \ge 6$)

עבור $i = 1,\ldots,10$.

במונחי תכונות אלו, אנו מחפשים את $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{10}}|$.

א. העולם שלנו הוא מספר האפשרויות לפזר 15 כדורים זהים ל-10 תאים שונים ללא הגבלות:

$$|U| = \binom{15+(10-1)}{15}$$

ב. בהנתן k תכונות שמתקיימות (ז"א - k משתנים שמקבלים ערך $6 \leq$), נותר לנו לפזר $15-6k$ כדורים זהים ל-10 תאים שונים, ללא הגבלות. מכאן אנו מקבלים (מטעמי סימטריה) שעוצמת החיתוך של k קבוצות היא:

$$\binom{15-6k+(10-1)}{15-6k} = \binom{24-6k}{15-6k}$$

(נשים לב כי עוצמת החיתוך של 3 קבוצות או יותר היא 0, שכן לא יתכן כי יתקיימו יותר מ-2 תכונות במקביל. לשם כך יש צורך בלפחות $3 \cdot 6 = 18$ כדורים מלכתחילה)
ובסה"כ הפתרון הוא:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{10}}| = |U| - \sum_{i=1}^{10} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 10} |A_i \cap A_j| =$$
$$= \binom{24}{15} - \binom{10}{1}\binom{18}{9} + \binom{10}{2}\binom{12}{3}$$

על שאלה זו עליכם לענות בצורה מסודרת ומפורטת בדף זה !!!

שאלה 3

1) בהנתן קבוצה A , נגדיר פונקציה $f:A\to P(P(A))$ ע"י $f(a)=\{B \mid B\subseteq A, a\in B\}$.

לדוגמא, אם $A=\{1,2\}$ אז $f(1)=\{\{1\},\{1,2\}\}$.

הוכח או הפרך :

א. f היא חד חד ערכית. (5 נקודות) .

ב. f היא על. (5 נקודות).

2. בהנתן קבוצה A , נגדיר פונקציה $f:P(A)\to P(P(A))$ ע"י $f(X)=\{B \mid B\subseteq A, X\subseteq B\}$.

לדוגמא : אם $A=\{1,2,3\}$ אז $f(\{1,2\}=\{\{1,2\},\{1,2,3\}\}$.

א. מצא את $f(\varnothing)$. (2 נקודות).

הוכח או הפרך :

ב. f היא חד חד ערכית. (4 נקודות).

ג. f היא על. (4 נקודות).

פתרון:

1) א. הטענה נכונה. נניח ש $a_1,a_2\in A$ ו $a_1\neq a_2$. נוכיח ש $f(a_1)\neq f(a_2)$. ובכן, $a_1\in\{a_1\}$ ולכן $\{a_1\}\in f(a_1)$. באותו אופן, $a_2\in\{a_2\}$ ולכן $\{a_2\}\in f(a_2)$. כיון ש ש $a_1\neq a_2$, הרי $\{a_1\}\neq\{a_2\}$ $f(a_1)\neq f(a_2)$.

2) ב. הטענה אינה נכונה. עפ"י משפט קנטור, $|A|<|P(A)|<|P(P(A))|$ ולכן לא תתכן פונקציה $f:A\to P(P(A))$ שהיא על .

3) א. כיון שלכל $B\in P(A)$, $\varnothing\subseteq B$, כל תת קבוצה של A נמצאת בתוך $f(\varnothing)$, מכאן ש $f(\varnothing)=P(A)$.

ב. הטענה נכונה. נניח ש $X,Y\in P(A)$ כך ש $X\neq Y$. בלי הגבלת הכלליות, נוכל להניח ש X אינה מוכלת ב Y . לכן $Y\notin f(X)$. אבל כיון ש $Y\subseteq Y$, הרי $Y\in f(Y)$ ומכאן ש $f(X)\neq f(Y)$.

ג. הטענה אינה נכונה. עפ"י משפט קנטור, $|P(P(A))|>|P(A)|$ ולכן לא תתכן פונקציה $f:P(A)\to P(P(A))$ שהיא על.

חלק ב'

בחלק זה עליכם לענות לפי ההנחיות בגוף השאלה.

<u>שאלה 4 (10 נקודות)</u>

רשום נוסחת נסיגה עם תנאי התחלה מספיקים לתיאור מספר תתי הקבוצות של $\{1,...,n\}$ שאינן מכילות שני מספרים עוקבים. למשל, תתי הקבוצות של $\{1,2\}$ המקיימות תכונה זו הן:
$\varnothing,\{1\},\{2\}$.

<u>פתרון:</u>

נסמן את מספר תתי הקבוצות של $\{1,2,...,n\}$ בהן אין אף זוג מספרים עוקבים כ- $f(n)$.
נשים לב שתתי הקבוצות האלו מתחלקות לשתי קבוצות:

א. תתי קבוצות בהן האיבר n אינו מופיע – אילו בדיוק כל הקבוצות החוקיות עבור $\{1,2,...,n-1\}$ ולכן מספרן $f(n-1)$.

ב. תתי הקבוצות בהן האיבר n מופיע (ולכן $n-1$ בהכרח אינו מופיע) – אלו בדיוק כל הקבוצות החוקיות עבור $\{1,2,...,n-2\}$ כאשר מוסיפים לכולן את האיבר n ולכן מספרן $f(n-2)$.

לכן מתקבל כלל הנסיגה: $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$ עבור $n\geq 3$.

תנאי ההתחלה הם: $f(1)=2$, $f(2)=3$.

שאלה 5 (כל סעיף שווה 5 נקודות).

תהיינה A,B קבוצות סופיות כך ש $|A|=9, |B|=12$.

ענה על הסעיפים הבאים תשובה סופית בלבד

א) כמה יחסים שונים ניתן להגדיר מעל A? $2^{9\cdot9}=2^{81}$.

ב) כמה פונקציות יש מ A ל B? 12^9

ג) כמה פונקציות חד חד ערכיות יש מ A ל B? $\frac{12!}{3!}=12\cdot11\cdots5\cdot4$

ד) כמה פונקציות שהן חד חד ערכיות ועל יש מ A ל B? 0. (עפ"י שובך היונים).

ה) כמה יחסי שקילות מעל A מקיימים את התנאי הבא: "כל מחלקות השקילות הן בעלות 3 איברים בדיוק"? (רמז: חשבו על הקשר בין יחסי שקילות לחלוקות.)

יש למצוא את מספר החלוקות של הקבוצה $\{1,2,...,9\}$ לשלש קבוצות של שלשה איברים בכל אחת. תחילה בוחרים שלשה מספרים מתוך $\{1,2,...,9\}$ ב $\binom{9}{3}$ אפשרויות. אח"כ בוחרים עוד שלשה מספרים מתוך ששת המספרים שנותרו ב $\binom{6}{3}$ אפשרויות. הקבוצה השלישית כבר נבחרת אוטומטית. שימו לב לכך שבדרך זו, כיון שסדר הקבוצות בחלוקה אינו משנה, כל חלוקה נספרת $3!=6$ פעמים. לכן בס"ה נקבל: $\frac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}}{3!}$ אפשרויות.

שאלה 6

תהי A **קבוצה אינסופית.** נסמן:

$|A|=\kappa$, $B=\{X \mid X\subseteq A\}$, $F=$, $C=\{f \mid f:A\to P(A)\}$ קבוצת כל היחסים מ-A ל- B,

$H=\{f \mid f:B\to B\}$.

א. העוצמה של C היא: **(הקיפו את התשובה היחידה הנכונה) (4 נקודות)**

1. $\kappa^2+\kappa$

2. 2^κ

3. $\kappa\cdot\kappa$

4. 2^{2^κ}

5. 2^{κ^κ}

פתרון:

נשים לב ש $C=P(A)^A$, לכן $|C|=|P(A)^A|=|P(A)|^{|A|}=(2^\kappa)^\kappa=2^{\kappa\cdot\kappa}=2^\kappa$.

ב. $=|F\times H|$ **(הקיפו את התשובה היחידה הנכונה)** (4 נקודות)

1. $\kappa!$

2. $2^\kappa\cdot 2^\kappa$

3. $\kappa^2\cdot 2^\kappa$

4. 2^{2^k}

5. $\kappa!\cdot 2^\kappa$

פתרון:

נשים לב ש $B=P(A)$, $F=P(A\times B)$, $H=B^B$. לכן $|B|=2^\kappa$, $|F|=2^{\kappa\cdot 2^\kappa}=2^{2^\kappa}$,

$|H|=(2^\kappa)^{2^\kappa}=2^{\kappa\cdot 2^\kappa}=2^{2^\kappa}$, ולבסוף $|F\times H|=2^{2^\kappa}\cdot 2^{2^\kappa}=2^{2^\kappa}$.

ג. מהי עוצמת הקבוצה הבאה $\{R$ יחס שקילות על N ו- $|N/R|=2$ $|R\}$, כלומר עוצמת קבוצת כל יחסי השקילות (על N) בעלי שתי מחלקות שקילות.

פתרון: בשל ההתאמה בין יחסי שקילות וחלוקות, שקול למצוא את עוצמת הקבוצה הבאה:

$T=\{\{A,A^c\}\mid A\subseteq N, A\neq\varnothing, A\neq N\}$. נוכיח $|T|=|P(N)|$.

פונקציה טבעית $f:P(N)\setminus\{\varnothing,N\}\to T$ תהיה $f(A)=\{A,A^c\}$, f אמנם על אך איננה חח״ע.

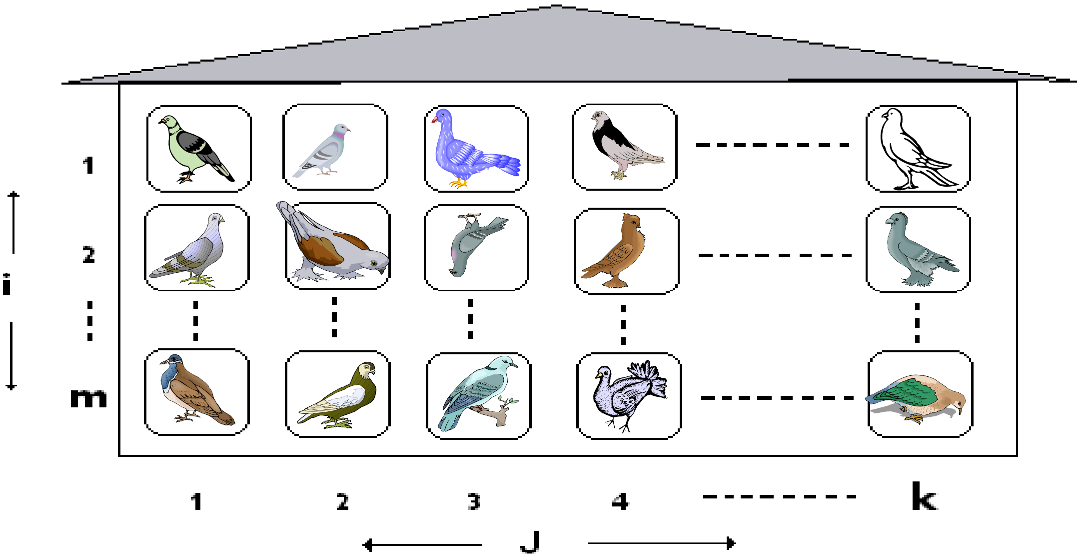
נשים לב ש- T קבוצה אינסופית (למה?), ולכן $|T|=|T\times\{0,1\}|$. נגדיר אם כן פונקציה

$g:P(N)\setminus\{\varnothing,N\}\to T\times\{0,1\}$ ע״י $g(A)=\begin{cases}(\{A,A^c\},0) & if\quad 1\in A\\ (\{A,A^c\},1) & if\quad 1\notin A\end{cases}$,

g חח״ע ועל ולכן $\aleph=|P(N)|=|P(N)\setminus\{\varnothing,N\}|=|T\times\{0,1\}|=|T|$.

<u>שאלה 7 (25 נקודות)   (כל סעיף שווה 5 נקודות)</u>

בחצר יש שובך יונים בן **m** קומות כאשר בכל קומה **k** תאים. בכל תא בשובך יש מקום בשביל יונה אחת בלבד. כל תא בשובך ניתן לתאור ע״י האינדקסים (i, j) כאשר $1 \le i \le m$ ו $1 \le j \le k$. בתוך השובך מסודרות $n = m \cdot k$ יונים **<u>שונות</u>**, ראו ציור:



הערה: השתמשו בביטוי CD(n) בשביל לבטא את מספר הפרות הסדר (כלומר מספר התמורות שהן אי סדר מלא) של n עצמים שונים, מבלי לכתוב את הביטוי המפורש לכך. ענו על הסעיפים הבאים.

א. נתון שמספר הקומות **m** הוא 2. בכמה דרכים ניתן לסדר מחדש את היונים כך שאף יונה לא תמצא בקומתה המקורית?

פתרון: את היונים שהיו בקומה העליונה ניתן לסדר בקומה התחתונה ב- $k!$ אפשרויות, ואת אלה שבתחתונה אפשר לסדר בעליונה גם ב- $k!$ אפשרויות, סה״כ: $(k!)^2$.

בסעיפים הבאים מספר הקומות m הינו גדול מ- 2. כמו כן יונים הנמצאות באותה קומה בשובך תקראנה ״שותפות לקומה״.

ב. בכמה דרכים ניתן לסדר מחדש את היונים כך שיונים שהיו ״שותפות לקומה״ בסידור המקורי תשארנה ״שותפות לקומה״ בסידור החדש? (היונים רשאיות אך אינן חייבות להשאר בקומתן המקורית).

פתרון: היונים צריכות להשאר ביחד בכל הקומות, ליונים מאותה קומה יש $k!$ סידורים, וכן ניתן לסדר את הקומות מחדש ב $m!$ דרכים, סה״כ: $m! \cdot (k!)^m$.

ג. בכמה דרכים ניתן לסדר מחדש את היונים כך שיונים שהיו ״שותפות לקומה״ בסידור המקורי תשארנה ״שותפות לקומה״ בסידור החדש, אך אף יונה לא תשאר בקומתה המקורית?

פתרון: אם אף יונה לא נשארת בקומתה המקורית אז צריך לעשות הפרת סדר על הקומות

ולכן נקבל סה"כ: $CD(m)\cdot(k!)^m$.

ד. בכמה דרכים ניתן לסדר מחדש את היונים כך ששלושת התנאים הבאים מתקיימים:
1. יונים שהיו "שותפות לקומה" בסידור המקורי תשארנה "שותפות לקומה" בסידור החדש.
2. אף יונה לא תשאר בקומתה המקורית.
3. אף יונה לא תשאר במקומה המקורי בשורה (דהיינו האינדקס j של מקום היונה חייב להשתנות).

פתרון: אם אף יונה לא נשארת במקומה היחסי בשורה אז צריך לעשות גם הפרת סדר בתוך השורות ולכן נקבל סה"כ: $CD(m)\cdot[CD(k)]^m$.

ה. בכמה דרכים ניתן לסדר מחדש את היונים כך שכל יונה תשמור על מקומה המקורי בשורה (האינדקס j ישמר), אבל אף יונה לא תשאר בקומתה המקורית?

פתרון: אם היונה נשארת במקומה היחסי בשורה, אבל הקומה שלה צריכה להתחלף אז בעצם אנו עושים הפרות סדר על כל עמודה וזה נותן סה"כ: $[CD(m)]^k$.

בהצלחה!!!