לינארית להנדסה- פתרון תרגיל 10

תרגיל 1.

1. יהי $B=\{v_1,\dots v_n\}$ קבוצה בת"ל ו-$v_{n+1}\notin Span\{B\}$ הוכיחו ש-$B'=B\bigcup\{v_{n+1}\}$ בת"ל
2. יהי $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ קבוצה בת"ל השלימו את B לבסיס ל-$\mathbb{R}^4$

פתרון.

1. יהי צ"ל של אברי B' ששווה ל-0 נראה שהצירוף חייב להיות הצירוף הטריוואלי.

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i v_i=0\\ \Downarrow\\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i+\alpha_{n+1}v_{n+1}=0\\ \Downarrow\\ v_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}-\frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}}v_i\end{gathered}$$

אם $\alpha_{n+1}=0$אז נקבל ש-B ת"ל בסתירה לנתון, ואם $\alpha_{n+1}\neq 0$ אז נקבל $v_{n+1}\in Span\{B\}$ בסתירה לנתון.

.2

פתרון. צריך למצוא שני בתל $\{v_1,v_2\}$ כך ש-$v_1,v_2\notin Span\{B\}$ כדי למצוא שני וקטורים כאלו נאפיין את $Span\,(B)$ בעזרת משוואות

$$\begin{aligned}Span\,(B) &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\,\exists a,b: a\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\right\} =\\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\,\exists a,b: a\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\left(\begin{array}{cc|c}1&1&x\\2&-1&y\\3&1&z\\4&1&w\end{array}\right)\right\} =\\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\left(\begin{array}{cc|c}1&1&x\\2&-1&y\\0&-2&z-3x\\0&3&w-4x\end{array}\right)\right\} =\\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\begin{cases}z-3x=0\\w-4x=0\end{cases}\right\}\end{aligned}$$

אנחנו רוצים ווקטורים שלא שייכים ל-$span\left\{B\right\}$ לכן נבחר ווקטורים לא מקיימים את התנאים הנ"ל למשל

$$\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

יעבודו, מכאן ש-

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

הוא בסיס ל-$\mathbb{R}^4$

תרגיל 2. הוכח\הפרך : יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ אז

$$rank\left(A+B\right)\leq rank\left(A\right)+rank\left(B\right)$$

פתרון.

יהי $\left\{v_1,\ldots v_m\right\}$ בסיס ל-$C\left(A\right)$ ו-$\left\{w_1,\ldots w_k\right\}$ בסיס ל-$C\left(A\right)$, נתבונן בעמודה $A+B$

$$C_i\left(A+B\right)=C_i\left(A\right)+C_i\left(B\right)=\sum_{i=1}^{m}\beta_iv_i+\sum_{i=1}^{k}\gamma_iw_i$$

מכאן שמרחב העמודות של $A+B$ מקיים

$$C\left(A+B\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iC_i\left(A+B\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\sum_{i=1}^{m}\beta_iv_i+\sum_{i=1}^{k}\gamma_iw_i\right)\subseteq Span\left\{v_1,\ldots,v_m,w_1,\ldots,w_k\right\}$$

מכאן שמתקיים

$$rank\left(A+B\right)=dim\left(C\left(A+B\right)\right)\leq m+k=rank\left(A\right)+rank\left(B\right)$$

תרגיל 3. תהי מטריצה $A\in M_{4\times8}\left(\mathbb{R}\right)$ כך ש-$Rank\left(A\right)=4$

1. האם שורות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?
2. האם עמודות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?
3. למה שווה $dim\left(N\left(A\right)\right)$?

פתרון.

1. **נתון ש-**

$$Rank\left(A\right)=dim\left(R\left(A\right)\right)=4$$

ויש 4 שורות, לכן שורות A בת"ל.

2. **נתון ש-**

$$Rank\left(A\right)=dim\left(C\left(A\right)\right)=4$$

ויש 8 עמודות לכן, עמודות A ת"ל

3. **ידוע ש-**

$$Rank\left(A\right)+dim\left(N\left(A\right)\right)=8$$

לכן

$$4+dim\left(N\left(A\right)\right)=8$$

מכאן

$$dim\left(N\left(A\right)\right)=8-4=4$$

תרגיל 4. הפוך את הקבוצה $\left\{ v_{1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},v_{2}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},v_{3}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ לקבוצה אורתונורמלית.

פתרון.

נבחר $w_{1}=v_{1}$

$$w_{2}=v_{2}-\frac{<v_{2},w_{1}>}{||w_{1}||^{2}}w_{1}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}w_{3} & = v_{3}-\frac{<v_{3},w_{1}>}{||w_{1}||^{2}}w_{1}-\frac{<v_{3},w_{2}>}{||w_{2}||^{2}}w_{2}\\
 & = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{(\frac{1}{2})}{(\frac{6}{4})}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\\
 & = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\\
 & = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

כעת $\{w_{1},w_{2},w_{3}\}$**אורתוגונאלית (בדקו!). ננרמל את הוקטורים**

$$||w_{1}||=\sqrt{2}\quad||w_{2}||=\frac{\sqrt{6}}{2}\quad||w_{3}||=\frac{\sqrt{12}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

כעת $\left\{ \frac{w_{1}}{||w_{1}||},\frac{w_{2}}{||w_{2}||},\frac{w_{3}}{||w_{3}||}\right\}$ **קבוצה אורתונורמלית.**

תרגיל 5. הוכיחו ש-$\langle A,B\rangle=tr\left(AB^{t}\right)$ היא מכפלה פנימית מעל $V=\mathbb{R}^{n\times n}$

פתרון.

כדי להוכיח ש- $\langle A,B\rangle=tr\left(AB^{t}\right)$ **היא מכפלה פנימית יש להוכיח 3 תכונות (לינארית ברכיב הראשון, הרמיטיות, אי-שליליות)**

1. לינאריות:

$$\begin{aligned}\langle A+\alpha B,C\rangle & =\\
tr\left(\left(A+\alpha B\right)C^{t}\right) & =\\
tr\left(AC^{t}+\alpha BC^{t}\right) & =\\
tr\left(AC^{t}\right)+\alpha tr\left(\alpha BC^{t}\right) & =\\
\langle A,C\rangle+\alpha\langle B,C\rangle
\end{aligned}$$

2. הרמיטיות (סימטריות):

$$\begin{aligned} \langle A,B\rangle &= \\ tr\left(AB^t\right) &= \\ tr\left(\left(AB^t\right)^t\right) &= \\ tr\left(BA^t\right) &= \\ \langle B,A\rangle \end{aligned}$$

3. אי-שליליות

$$\begin{aligned} \langle A,A\rangle &= \\ tr\left(AA^t\right) &\overset{*}{=} \\ \textstyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2 &\geq \\ 0 \end{aligned}$$

ומתקיים

$$\langle A,A\rangle=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2=0\Leftrightarrow\forall i,j:a_{ij}=0$$

***אם נסמן את B להיות AA^t אז**

$$b_{jj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}a_{ij}^t=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}a_{ji}=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}^2$$

לכן

$$tr\left(B\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2$$

שלושת התכונות מתקיימות, לכן זאת מכפלה פנימית.

תרגיל 6. הוכיחו שמתקיים $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$.
שוויון זה נקרא כלל המקבילית כי מבחינה גאומטרית הוא הקובע שבמקבילית סכום ריבועי ארבע צלעות שווה לסכום ריבועי האלכסונים.

פתרון.
נתחיל מאגף שמאל ונגיע לאגף ימין

פתרון.

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= \\ \langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle \\ \langle x,x\rangle+\langle y,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle+\langle x,x\rangle+\langle -y,x\rangle+\langle x,-y\rangle+\langle -y,-y\rangle &= \\ \|x\|^2+\langle y,x\rangle+\langle x,y\rangle+\|y\|^2+\|x+y\|^2-\langle y,x\rangle-\langle x,y\rangle+\|-y\|^2 &= \\ 2\|x\|^2+2\|y\|^2 \end{aligned}$$

תרגיל 7. יהא V מעל $\mathbb{F}$ ממ"פ עם מ"פ $\langle v,u\rangle$.

1. הוכיחו כמעט לינארית ברכיב שני. כלמר הוכיחו כי $\langle v,\alpha u+w\rangle=\bar{\alpha}\langle v,u\rangle+\langle v,w\rangle$ (לכל $v,u,w\in V$ ולכל α סקלאר)
2. יהא $B=\{v_1,\dots v_n\}$ בסיס. יהא $v\in V$ כך שלכל i מתקיים $\langle v_i,v\rangle=0$. הוכח כי $v=0$
3. יהא $B=\{v_1,\dots v_n\}$ בסיס. יהיו $v,u\in V$ כך שלכל i מתקיים $\langle v_i,v\rangle=\langle v_i,u\rangle$. הוכח כי $v=u$
4. לכל $\alpha\in\mathbb{R}_{>0}$ נגדיר פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha:V\times V\to\mathbb{F}$ ע"י $\langle v,v'\rangle_\alpha=\alpha\cdot\langle v,v'\rangle$. הוכיחו כי $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha$ גם כן מ"פ על V.

פתרון.

1. **לפי הגדרת מכפלה פנימית ותכונות הצמוד המרוכב נקבל כי**

$$\langle v, \alpha u + w\rangle = \overline{\langle \alpha u + w, v\rangle} = \overline{\langle \alpha u, v\rangle + \langle w, v\rangle} = \overline{\alpha\langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle} = \bar{\alpha}\overline{\langle u, v\rangle} + \overline{\langle w, v\rangle} = \bar{\alpha}\langle v, u\rangle + \langle v, w\rangle$$

2. **כיוון ש B בסיס, קיים צירוף לינארי**

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

ולכן

$$\langle v, v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 0 = 0$$

ולכן מתכונות מכפלה פנימית $v = 0$ כנדרש.

3. **גכעג**

$$\begin{gathered}\langle v_i, v\rangle = \langle v_i, u\rangle \\ \Downarrow \\ \langle v_i, v\rangle - \langle v_i, u\rangle = 0 \\ \Downarrow \\ \langle v_i, v - u\rangle = 0 \\ \Downarrow \\ v - u = 0 \\ \Downarrow \\ v = u\end{gathered}$$

4. **כן! נבדוק את אקסיומות מ"פ בהסתמך שהאקסימות מתקיימות עבור $\langle v, v'\rangle$**

(א) **לינאריות ברכיב הראשון:**

$$\langle v + \beta u, w\rangle_\alpha = \alpha\cdot\langle v + \beta u, w\rangle = \alpha\cdot[\langle v, w\rangle + \beta\cdot\langle u, w\rangle] = \alpha\cdot\langle v, w\rangle + \beta\cdot\alpha\cdot\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle_\alpha + \beta\cdot\langle u, w\rangle_\alpha$$

(ב) **הרמטיות:**

$$\langle v, v'\rangle_\alpha = \alpha\cdot\langle v, v'\rangle = \alpha\cdot\overline{\langle v', v\rangle} = \overline{\alpha\cdot\langle v', v\rangle} = \overline{\langle v', v\rangle_\alpha}$$

כאשר השיוון השלישי נכון בגלל ש $\alpha \in \mathbb{R}$ ולכן $\bar{\alpha} = \alpha$

(ג) **אי שליליות**

$$\langle v, v\rangle_\alpha = \alpha\cdot\langle v, v\rangle \geq 0$$

ככפל של 2 מספרים ממשים אי שלילים. בנוסף $\langle v, v\rangle_\alpha = \alpha\cdot\langle v, v\rangle = 0$ אמ"מ $\langle v, v\rangle = 0$ (כי $\alpha \neq 0$) אמ"מ $v = 0$.

תרגיל 8. נגדיר $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ כך

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + y + 3z$$

ונגדיר קבוצה $\mathbb{R}^3 \supseteq \left\{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = 1\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\} = S$ (כאשר $\|v\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית). מצאו

$$\max_{v \in S} f(v)$$

כלומר את הערך המקס' ש f מקבלת עבור קלטים מ S. [רמז: אי שיוויון קושי שוורץ, שימו לב כי $f(v) = \left\langle v, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\rangle$]

פתרון.

לפי קושי שוורץ במרחב $\mathbb{R}^3$ **עם המכפלה הסקלארית ו** $u=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ **נקבל ש**

$$2x+y+3z=|\langle v,u\rangle|\le\|v\|\cdot\|u\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{14}$$

ולכן עבור $v\in S$ **נקבל** $2x+y+3z\le\sqrt{14}$ **כלומר** $\max_{v\in S}f(v)\le\sqrt{14}$ **. נראה כי מתקיים שיוון. אכן עבור** $t=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ **ו** $\frac{t}{\|t\|}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\in S$ **מתקיים כי**

$$f(\frac{t}{\|t\|})=\left\langle\frac{t}{\|t\|},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\rangle=\sqrt{14}$$

וסיימנו.

תרגיל 9. תהי $S=\{v_1,\ldots,v_k\}$ קבוצה אורתונורמלית ב-V הוכח שלכל $v\in V$ מתקיים $v-\sum_{i=1}^k\langle v,v_i\rangle v_i\in S^\perp$

פתרון. **כדי ש-** $w\in V$ **יהי שייך ל-** $S^\perp$ **צריך להוכיח ש-** $\forall v_j\in S:\ \langle w,v_j\rangle=0$ **אז במקרה שלנו** $w=v-\sum_{i=1}^k\langle v,v_i\rangle v_i$

$$\begin{array}{rcccl}\langle w,v_j\rangle & = & \left\langle v-\sum_{i=1}^k\langle v,v_i\rangle v_i,v_j\right\rangle & = & \\ & = & \langle v,v_j\rangle-\sum_{i=1}^k\langle v,v_i\rangle\langle v_i,v_j\rangle & = & \\ & = & \langle v,v_j\rangle-\langle v,v_j\rangle\langle v_j,v_j\rangle & = & \\ & = & \langle v,v_j\rangle-\langle v,v_j\rangle\|v_j\|^2 & = & \\ & = & \langle v,v_j\rangle-\langle v,v_j\rangle & = & 0\end{array}$$

בהצלחה!!