

ה' באלול התשע"ד (31.8.2014)

בס"ד

אלגברה לינארית 2 למדעי המחשב 89-113  
סמסטר ב' תשע"ד – 2014  
מועד ב'.

זמן הבחינה : 3 שעות.  
חומר עזר : מחשבון מדעי פשוט בלבד.

שימו לב: שאלה 1 – חובה.  
יש לבחור 3 שאלות מתוך שאלות 2-5.

**יש לענות באופן במסודר (!) בגוף השאלון בלבד. המחברת היא רק לטייטה! בנוסף, יש להראות כל העבודה הרלוונטי לפתרונות שלכם.**

בהצלחה!

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
4	
5	

1. ענה על אחד השאלות הבאות:

- א. יהי  $(V_F, \langle, \rangle)$  מרחב מכפלה פנימית, כאשר  $F = \mathbb{R}$  או  $F = \mathbb{C}$ .
- i. (20) הוכח את אי-שוויון המשולש: שלכל  $v, w \in V$  מתקיים ש
- $$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad (*)$$
- (ניתן לצטט ולהיעזר באי שוויון קושי שוורץ).
- ii. (5) מתי יש שוויון בין שני הצדדים ב(\*): ז"א  $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ .
- ב. יהי  $(V_{\mathbb{C}}, \langle, \rangle)$  מרחב מכפלה פנימית מעל שדה מספר המרוכבים  $\mathbb{C}$  ו  $\dim V = n$ . תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה ליניארית.
- i. (10) בעזרת המכפלה הפנימית הגדר את ההעתקה הצמודה ל  $T$ ,  $T^*$  שמסומן  $T^*$ .
- ii. (15) יהי  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  בסיס אורתונורמלי של  $V$ . נתון ש  $A = [T]_{\mathcal{B}}$ . מהו  $[T^*]_{\mathcal{B}}$ ? הוכח את תשובתך.



יש לבחור שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות :

$$2. \quad \text{תהי } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

- א. (7) האם ניתן ללכסן את  $A$ ? הסבר.
- ב. (10) מצא מטריצות  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  אורתוגונלית ו  $\Lambda \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  אלכסונית כך ש  $P^T A P = \Lambda$ .
- ג. (8) בעזרת תשובתכם לסעיף ב', מצאו  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  סימטרית כך ש  $B^2 = A$ .



3. יהי  $V_F$  מרחב ווקטורי,  $\dim V = n$ . לכל סעיף נניח ש  $T: V \rightarrow V$  העתקה ליניארית.

א. הוכיחו ש:  $\ker T \subseteq \ker T^2$  וגם  $\text{Im } T^2 \subseteq \text{Im } T$ .

ב. הוכיחו ש  $\ker T = \ker T^2 \Leftrightarrow \text{Im } T^2 = \text{Im } T$ .

ג. הוכיחו שאם  $\text{Im } T^2 = \text{Im } T$  אזי מתקיים ש  $V = \text{Im } T \oplus \text{Ker } T$ .



4. תהי  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  .  
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- א. (5) מצא את הפולינום האופייני של  $A$  .  
ב. (5) מצא את פולינום המינימלי של  $A$  .  
ג. (10) מצא צורת הג'ורדן של  $A$  .  
ד. (5) אם קיימת מטריצה  $Q$  כך ש  $Q^{-1}AQ$  היא מטריצה אלכסונית?



5. (25) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. טענה: תהי  $A \in F^{n \times n}$  מטריצה. יהי  $v$  ווקטור עצמי של  $A$  עם ערך עצמי  $\lambda$ . עבור כל פולינום  $g(x) \in F[x]$ , מתקיים ש:  
$$v g(A) = g(\lambda) v$$

ב. טענה: תהי  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  (מטריצה מרוכבת) כך ש  $|A| = 1$ . אזי קיימת מטריצה אוניטרית  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  כך ש  $U^* A U$  היא מטריצה אלכסונית.