

## תרגיל בית 6 - תורת גלואה סמסטר א', תשע"ז

**שאלה 0.1.** האם ההרחבות הבאות הן נורמליות? אם לא, הרחיבו אותם לסגור הנורמלי ע"י סיפוח שורשים של היוצרים:

1.  $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}$

2.  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]$

3.  $\mathbb{Q}[\rho_5]$

**שאלה 0.2.** הוכיחו כי כל הרחבה  $K/F$  ממימד 2 היא נורמלית.

**שאלה 0.3.** העזרו בתרגיל בית הקודם וחשבו את תת-השדות של ההרחבות הבאות:

1. שדה הפיצול של  $x^3 - 5$  מעל  $\mathbb{Q}$ .

2. שדה הפיצול של  $x^7 - 1$  מעל  $\mathbb{Q}$ .

3. שדה הפיצול של  $x^4 + 1$  מעל  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  (שימו לב ש  $\rho_8 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ).

**שאלה 0.4.** תהי  $E/F$  הרחבת גלואה ממימד  $p^n$  עבור מספר ראשוני  $p$ . הוכיחו כי יש שדות ביניים ממימד  $p$  ו  $p^{n-1}$ . (רמז: משפטי סילוא)

**שאלה 0.5.** יהי  $E$  שדה הפיצול של פולינום אי-פריק  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  מדרגה 4, ויהי  $\alpha \in E$  שורש של  $f(x)$ .

נתון כי  $Gal(E/\mathbb{Q}) \cong S_4$  הוכיחו כי אין תת שדות לא טריוויאלים בהרחבה  $\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}$ .

האם  $\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}$  היא הרחבת גלואה?

עובדה שימושית מתורת החבורות:  $S_3$  היא ת"ח מקסימלית של  $S_4$  (כלומר שאין ת"ח חוץ מ  $S_3$  ו  $S_4$  שמכילות את  $S_3$ ).