

לינארית 2 מדמח

מטלה 7

הנחיות:

בראש הדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים: מספר תרגיל, שם מלא, ת.ז וסימן זיהוי לקבוצת התירגול שלכם (מספר קבוצה או יום +שעה).

ענו על השאלות הבאות:

$$1. \text{ מצאו את צורת זורדן של המטריצה } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

פתרון: מתקיים כי הפ"א הוא $p_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^3$ והפ"מ הוא $m_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$ ובנוסף $\dim V_1 = 1$, $\dim V_{-2} = 1$. ניעזר בריכוז הנתונים

λ	Alg.=# λ	Geo.=# Blocks	Power in $m_A =$ Biggest Block
1	3	2	2
-2	1	1	1

להיסק כי צורת זורדן של A היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$$

2. תהא $A = J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ בלוק זורדן. עבור איזה ערכי λ מתקיים כי A, A^2 דומות? **פתרון:** מחישוב ישיר

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \\ & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ & & \lambda^2 & 2\lambda \\ & & & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

למטריצות דומות יש אותם ע"ע. כיון ש λ הוא ע"ע יחיד של A ו λ^2 הוא ע"ע יחיד של A^2 אזי אם הן דומות צריך להתקיים $\lambda^2 = \lambda$. זה קורה רק אם $\lambda \in \{0, 1\}$. נבדוק אם במקרים אלו המטריצות דומות.

אם $\lambda = 0$ אזי

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

והפולינום המינימאלי שלה $m_{A^2}(\lambda) = \lambda^3$ אבל $m_A(\lambda) = \lambda^4$ ולכן המטריצות לא דומות.

אם $\lambda = 1$ אזי

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

ומתקיים כי $m_{A^2}(\lambda) = (\lambda - 1)^4$ וכן בצורת זורדן של A^2 יש בלוק מגודל 4×4 ומכיוון שצורת זורדן היא מטריצה 4×4 נקבל שצורת זורדן של A^2 היא A ולכן הן דומות.

3. מצאו צורת זורדן ומטריצה מזרדנת למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -8 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

כלומר מצאו P כך ש $P^{-1}AP$ בצורת זורדן ומצאו צורת זורדן זאת.
פתרון: הפ"א

$$p_A(x) = \left| \begin{pmatrix} x-3 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & x+3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & x-3 & 0 \\ 8 & -2 & 3 & x-1 \end{pmatrix} \right| = (x-3) \left| \begin{pmatrix} x-3 & 0 & 0 \\ -8 & x+3 & 2 \\ 8 & -2 & x-1 \end{pmatrix} \right| = (x-3)^2 \left| \begin{pmatrix} x+3 & 2 \\ -2 & x-1 \end{pmatrix} \right| = (x-3)^2(x+1)^2$$

ולכן הע"ע הם $-1, 3$. מ"ע ומ"ע מוכללים. עבור $x = 3$:

$$N(A - 3I) = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 8 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= N \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2t \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}^4 \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$N(A + I) = N \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -8 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= N \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}^4 \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן $m_A(x) = p_A(x)$ ולכן צורת זורדן היא

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

נמצא בסיס מזורדן. מ"ע מוכללים:

$$N(A - 3I)^2 = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -32 & 32 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 32 & -16 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -32 & 32 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 16 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -32 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 16 \end{pmatrix} =$$

$$N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2t - 1/4s \\ -t - 1/2s \\ s \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R}^4 \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$N(A + I)^2 = N \begin{pmatrix} 16 & 0 & 8 & 0 \\ 32 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ -32 & 0 & -24 & 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 16 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 16 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \\ t \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R}^4 \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן

$$B = \left\{ (A - 3I) \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, (A + I)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס 1

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

מטריצה מזורדנת.

בהצלחה! ☺