שיעורי בית מספר 4

1. יהיו $\mathbb{R}^4 \subseteq \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = S$. מצאו בסיס ל $W = S^{\perp}$.
(כאשר $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הסקלארית).
פתרון : מתקיים

$$\begin{aligned}
W &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, v_1 \right\rangle = 0 \wedge \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, v_1 \right\rangle = 0 \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \wedge \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} x+y+w & = & 0 \\ x+y+z+2w & = & 0 \end{cases} \right\}
\end{aligned}$$

כלומר W הוא אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית כבר ראינו זה תת מרחב.

כדי למצוא בסיס נפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} -t-s \\ s \\ -t \\ t \end{pmatrix} \middle| t, s \in \mathbb{R} \right\} = Span \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2. סטודנט סקרן החליט לבדוק מה עומד מאחורי הצלחתו במבחני התואר. הוא החליט שהפרמטרים הקובעים הם: P_1 מספר השעות שהקדיש ללימוד למבחן, P_2 מספר שיעורי הבית שפתר ו P_3 מספר הספרים שהוא קרא בנושא. הוא אסף את הנתונים הבאים מ 4 קורסים שונים

	P_1	P_2	P_3	Final Grade
1	4	2	3	7
2	2	3	3	4
3	4	4	5	8
4	2	5	5	6

השאלה שעמדה בפני הסטודנט היא מה המשקל שתרם כל פרטמר לציון המבחן. הוא החליט לסמן ב x_i את המשקל שתורם פרמטר P_i לציון הסופי וניסה למצוא אותם ע"י פתירת המשוואות

$$\begin{aligned}4x_1+2x_2+3x_3&=7\\2x_1+3x_2+3x_3&=4\\4x_1+4x_2+5x_3&=8\\2x_1+5x_2+5x_3&=6\end{aligned}$$

אך לצערו, לא נמצא פתרון... הסטודנט לא אמר נואש והחליט להשתמש בידע שרכש בקורס אלגברה לינארית... הוא החליט למצוא c_1,c_2,c_3 כך שוקטור התוצאה $b'=\begin{pmatrix}b'_1\\b'_2\\b'_3\\b'_4\end{pmatrix}$ שמחושב ע"י

$$\begin{aligned}4c_1+2c_2+3c_3&=b'_1\\2c_1+3c_2+3c_3&=b'_2\\4c_1+4c_2+5c_3&=b'_3\\2c_1+5c_2+5c_3&=b'_4\end{aligned}$$

יהיה הכי קרוב לוקטור התוצאה האמיתי $b=\begin{pmatrix}7\\4\\8\\6\end{pmatrix}$. כוונתו ב"קרוב" הוא למזער את $\|b-b'\|$ (כאשר $\|*\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית המוגדרת על $\mathbb{R}^4$). מצאו גם אתם את c_1,c_2,c_3.

[הדרכה: יצגו את הבעיה כמערכת משוואת $Ax=b$ וחשבו איך הבעיה של הסטודנט שקולה למיצאת הטלה של b על איזה שהוא תת מרחב (שהוא יהיה b')... לאחר מכן פתרו את המשוואה $Ax=b'$. אזהרה: תרגיל עם חישובים לפניך]

פתרון: נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}4&2&3\\2&3&3\\4&4&5\\2&5&5\end{pmatrix}$$

ונרצה לפתור את המערכת $Ax=b$ עבור $b=\begin{pmatrix}7\\4\\8\\6\end{pmatrix}$. נדרג.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&3&7\\2&3&3&4\\4&4&5&8\\2&5&5&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&3&7\\0&2&1.5&0.5\\0&2&2&1\\0&4&3.5&2.5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&3&7\\0&2&1.5&0.5\\0&0&0.5&0.5\\0&0&0.5&1.5\end{array}\right)$$

רואים כי אכן אין פתרון למערכת ועמודות A בת"ל. נשים לב כי $C(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^4\}$ והשאלה מבקשת למצוא $b' \in C(A)$ כך ש $\|b-b'\| = \min\{\|b - b"\| : b" \in C(A)\}$ שזה בדיוק התכונה של ההטלה $\pi_{C(A)}(b)$ ולכן לאחר שנמצא את b' נפתור את המערכת $Ax = b'$ והפתרון שלה יהיה $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ המבוקש.

נמצא בסיס או"ג ל $C(A)$ ע"י גרם שמידט

נסמן $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ונפעיל גרם שמידט.

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 \\
w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{40}{40} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\
w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{48}{40} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{12}{14} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{6}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/35 \\ -9/35 \\ 1/5 \\ 1/35 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

כלומר $\left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -3/35 \\ -9/35 \\ 1/5 \\ 1/35 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס אורתוגנלי ל $C(A)$.

כעת נטיל את $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ על $C(A)$ באמצעות הבסיס הזה שהוא או"ג. לפי התיאוריה

$$b' = \pi_{C(A)}(b) = \sum_{i=1}^{3} \pi_{w_i}(b) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle b, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i$$

נחשב

$$\frac{\langle b, w_1 \rangle}{||w_1||^2} w_1 = \frac{80}{40} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{\langle b, w_2 \rangle}{||w_2||^2} w_2 = \frac{8}{14} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{\langle b, w_3 \rangle}{||w_3||^2} w_3 = \frac{1/7}{4/35} \begin{pmatrix} -3/35 \\ -9/35 \\ 1/5 \\ 1/35 \end{pmatrix}$$

ונקבל בסופו של דבר

$$b^{'}=2\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix}+\frac{4}{7}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{28}\begin{pmatrix}-3\\-9\\7/5\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}27\\17\\33\\23\end{pmatrix}$$

נפתור את המערכת $Ax=b'$ ונקבל שהפתרון הוא

$$c=\begin{pmatrix}1\\-1/2\\5/4\end{pmatrix}$$

3. יהא $V=\mathbb{R}^5$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. נגדיר ב

$$W=\operatorname{span}\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ת"מ של V.

(א) מצאו בסיס אורתוגונאלי ל W ע"י שימוש בתהליך גרם שמידט על הבסיס $B=\{v_1,v_2,v_3\}$.
פתרון:

$$w_1=v_1$$
$$w_2=v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$w_3=v_3-\frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1-\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-2\\0\end{pmatrix}$$

(ב) מצאו את ההטלה (הניצבת/האורתוגונלית) של $v=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ על $W'=\operatorname{span}\{v_1,v_2\}$
(כלומר מצאו $\pi_{W'}(v)$)
פתרון: נשתמש בוקטור הא"ג שמצאנו בסעיף הקודם שמקיימים כי $span\{v_1,v_2\}=span\{w_1,w_2\}$

$$\pi_{W'}(v)=\frac{\langle v,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1+\frac{\langle v,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0.5\\1\\0.5\end{pmatrix}$$

4. תהא $H\in\mathbb{R}^{m\times n}$ שעמודותיה בת"ל.

(א) הוכיחו כי H^tH הפיכה. [הדרכה: הוכיחו תחילה כי $N(H^tH)=N(H)$].

פתרון: נראה כי $N(H^tH)=N(H)$: הכיוון $(\supseteq)$ ברור כי אם $Hx=0$ אזי $H^tHx=0$. בכיוון $(\subseteq)$ יהא x המקיים $H^tHx=0$ נכפיל ב x^t משמאל ונקבל $x^tH^tHx=\|Hx\|^2=0$ כאשר הנורמה היא הנורמה המושרית מהמ"פ הסקלארית. ולכן $Hx=0$ כנדרש.

כעת נסיק כי $rank(H^tH)=rank(H)$ לפי משפט הדרגה. כיוון שעמודות H בת"ל נקבל כי $rank(H)\geq n$ ולכן $rank(H^tH)=n$ כי זוהי מטריצה ריבועית מגודל $n\times n$. ומכאן ש H^tH הפיכה.

(ב) עבור מערכת משוואת $Hx=b$ הוקטור $\tilde{x}=\left(H^tH\right)^{-1}H^tb$ נקרא קירוב הריבועים הפחותים (LSQ). הוכיחו כי $\min\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(b_i-[Hx]_i\right)^2:x\in\mathbb{R}^n\right\}$ מתקבל ב $\tilde{x}$.

פתרון: ה $\min\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(b_i-[Hx]_i\right)^2:x\in\mathbb{R}^n\right\}$ מתקבל עבור Hx שהוא $\pi_{C(H)}(b)$ כאשר $\mathbb{R}^m$ עם הסקלארית. נוכיח כי $H\tilde{x}=\pi_{C(H)}(b)$. נסמן $\tilde{b}=H\tilde{x}=H\left(H^tH\right)^{-1}H^tb$.

רואים לפי הגדרה כי $\tilde{b}\in C(H)$. נותר לבדוק כי $b-\tilde{b}\in C(H)^{\perp}=R(H^t)^{\perp}=N(H^t)$ אכן

$$H^t\left(b-\tilde{b}\right)=H^tb-H^t\tilde{b}=H^tb-H^tH\left(H^tH\right)^{-1}H^tb=H^tb-H^tb=0$$

5. מצאו דוגמא ל V ממ"פ ו $T:V\to V$ ה"ל ו W-ת"מ שהוא T- אינוואראנטי כך ש W אינו T^*-אינוואראנטי.

פתרון: אם W T^*-אינוואראנטי אזי $W^{\perp}$ הוא $T=\left(T^*\right)^*$- אינוואראנטי. לכן מספיק למצוא $T:V\to V$ כך ש W הוא T- אינוואאנטי ו $W^{\perp}$ הוא לא T אינוואראנטי.

למשל $V=\mathbb{R}^2$ עם הסקלארית ו $W=span\left\{\binom{1}{0}\right\}$ אזי $W^{\perp}=span\left\{\binom{0}{1}\right\}$ ואם נגדיר $T:V\to V$ ע"י $T\binom{x}{y}=\binom{x+y}{0}$ אזי נקבל את הדרוש.

6. יהא $(V,\langle\rangle)$ ממ"פ ו יהא $W\leq V$ ת"מ

(א) הוכיחו כי לכל $w\in W$ ולכן $v\in V$ מתקיים כי $\langle w,v\rangle=\langle w,\pi_W(v)\rangle$

פתרון: יהיו v,w נתונים. אזי לפי משפט הפירוק הניצב קיים $w_1\in W,w_2\in W^{\perp}$ כך ש $v=w_1+w_2$ ואז לפי הגדרה

$$\langle w,v\rangle=\langle w,w_1+w_2\rangle=\langle w,w_1\rangle+\langle w,w_2\rangle=\langle w,w_1\rangle=\langle w,\pi_W(v)\rangle$$

(ב) יהא $T:V\to V$ אופרטור כך ש W הוא T-אינוואראנטי. נגדיר $T|_W:W\to W$ את הצמצום של T ל W. הוכיחו כי $\left(T|_W\right)^*:W\to W$ היא $\left(T|_W\right)^*=\pi_W\circ T^*$.

פתרון: יהיו $w,w'\in W$ נתונים.

$$\langle T|_Ww,w'\rangle=\langle Tw,w'\rangle=\langle w,T^*w'\rangle=\langle w,\pi_W\left(T^*w'\right)\rangle=\langle w,\left(\pi_W\circ T^*\right)w'\rangle$$

כאשר המעבר האמצעי נכון סעיף קודם (עם $v=T^*w'$) ולכן $\left(T|_W\right)^*=\pi_W\circ T^*$