תורת הקבוצות תרגיל בית 9

1.א. יהיו κ, λ סודרים גדולים מ0. הוכיחו: $\mathrm{cf}(\lambda+\kappa)=\mathrm{cf}(\kappa)$.
ב. למה שווה $\mathrm{cf}(\lambda\cdot\kappa)$ כאשר κ סודר עוקב?
פתרון:
אם κ עוקב אז $\kappa+\lambda$ עוקב, ונקבל $\mathrm{cf}(\lambda+\kappa)=\mathrm{cf}(\kappa)=1$.
כעת, נניח שκ גבולי. יש פונקציה קופילנית ושומרת סדר: $f:\kappa\to\lambda+\kappa$, $\forall\alpha<\kappa, f(\alpha)=\lambda+\alpha$. לכן מתרגיל שעשינו בכיתה נקבל ש$\mathrm{cf}(\lambda+\kappa)=\mathrm{cf}(\kappa)$.
ב. נניח $\kappa=\alpha+1$. אז $\lambda\cdot\kappa=\lambda(\alpha+1)=\lambda\alpha+\lambda$. לכן מסעיף א', $\mathrm{cf}(\lambda\cdot\kappa)=\mathrm{cf}\ (\lambda)$.

2. הוכח את חוקי החזקות למונים:
א. $\kappa^{\lambda\mu}=(\kappa^{\lambda})^{\mu}$.
ב. $(\kappa\lambda)^{\mu}=\kappa^{\mu}\lambda^{\mu}$.
פתרון:
א. נבנה פו' חח"ע ועל $^{\lambda\mu}\kappa\to{}^{\mu}(^{\lambda}\kappa)$ באופן הבא: תהי $f:\lambda\times\mu\to\kappa$. נגדיר $g:\mu\to(^{\lambda}\kappa)$ ע"י, $g_x(y)=f(x,y)$ לכל $x\in\mu, y\in\lambda$.
נוותר על הבדיקה של חח"ע ועל.
ב. נבנה פו ' חח"ע ועל $^{\mu}(\kappa\times\lambda)\to{}^{\mu}\kappa\times{}^{\mu}\lambda$ באופן הבא: תהי $f:\mu\to\kappa\times\lambda$, $f(x)=(y,z)$. נשלח את f ל (g,h), $g:\mu\to\kappa, h:\mu\to\lambda$ שמוגדרות כך: $g(x)=y, h(x)=z$.
נוותר על הבדיקה של חח"ע ועל.

3. נניח $2^{\aleph_0}=\aleph_{18}$. הוכיחו כי: $(\aleph_1)^{\aleph_0}=(\aleph_2)^{\aleph_0}$.
פתרון:
$2<\aleph_1,\aleph_2$ ולכן $2^{\aleph_0}\le(\aleph_1)^{\aleph_0},(\aleph_2)^{\aleph_0}$. מצד שני, $\aleph_1,\aleph_2<\aleph_{18}$, ולכן $(\aleph_1)^{\aleph_0},(\aleph_2)^{\aleph_0}\le(\aleph_{18})^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{(\aleph_0\times\aleph_0)}=2^{\aleph_0}$. כלומר, קיבלנו ש $(\aleph_1)^{\aleph_0}=(\aleph_2)^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

4. הוכיחו: $(\aleph_1)^{\aleph_0}=\aleph_1$ אמ"ם $2^{\aleph_0}=\aleph_1$.
פתרון:
$\Longleftarrow$: $2^{\aleph_0}>\aleph_0$, ולכן $2^{\aleph_0}\ge\aleph_1$. מצד שני, $2<\aleph_1$, ולכן $2^{\aleph_0}\le\aleph_1^{\aleph_0}=\aleph_1$. כלומר, $2^{\aleph_0}=\aleph_1$.
$\Longrightarrow$: אם $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, אז $(\aleph_1)^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\times\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph_1$.