פתרון תרגיל 11 – מבוא לאנליזה 1

1. הוכיחו שלמשוואה $2x = \cos x$ יש פתרון ממשי יחיד.

הוכחה: הפונקציה $f(x) = 2x - \cos x$ גזירה בכל $\mathbb{R}$ ומקיימת $f(0) = -1 < 0$, $f(\pi) = 2\pi + 1 > 0$, לכן ממשפט ערך הביניים יש $x_0 \in (0,\pi)$ כך ש־$f(x_0) = 0$, כלומר $2x_0 = \cos x_0$, ולמשוואה קיים פתרון. נוכיח שהפתרון יחיד: נניח בשלילה שהפתרון אינו יחיד. אז יש פתרון נוסף x_1, $f(x_0) = f(x_1) = 0$. ממשפט רול נובע שקיימת נקודה c בין x_0 ל־x_1 שבה $f'(c) = 0$. אבל $f'(x) = 2 + \sin(x) \geq 2 - 1 > 0$ ולכן לא ייתכן שהנגזרת מתאפסת, סתירה.

2. הפונקציה $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע $[-2,2]$ ומקיימת $f(-2) = f(0) = f(2)$. הוכיחו שקיימת נקודה $x_0 \in (-2,2)$ שבה $f''(x_0) = 0$.

הוכחה: $f(x)$ גזירה בקטע $[-2,0]$ ומקיימת $f(-2) = f(0)$, לכן ממשפט רול קיימת נקודה $c_1 \in (-2,0)$ שבה $f'(c_1) = 0$. בדומה, $f(x)$ גזירה בקטע $[0,2]$ ומקיימת $f(0) = f(2)$, לכן ממשפט רול יש נקודה $c_2 \in (0,2)$ בה $f'(c_2) = 0$. כעת, כיוון ש־f גזירה פעמיים בקטע $[-2,2]$, הפונקציה $f'(x)$ גזירה בקטע $[c_1,c_2]$ ומתקיים $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. לכן ממשפט רול קיימת נקודה $x_0 \in (c_1,c_2) \subseteq (-2,2)$ שבה $f''(x_0) = 0$, כדרוש.

3. הוכיחו שעבור $0 < a < b$ מתקיים $\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$.

הוכחה:

נניח $0 < a < b$ כלשהם. הפונקציה $f(x) = \ln x$ גזירה בקטע $[a,b]$, לכן ממשפט הערך הממוצע של לגרנז' קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש־$\frac{1}{c} = f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. נשים לב:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a} = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}$$

וכיוון ש־$a < c < b$, מתקיים $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$. ביחד נקבל בסה"כ

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a} < \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$$

כדרוש.

4. הפונקציה $f(x)$ גזירה בכל נקודה, $f'(x) \leq 7$ לכל x, $f(1) = 20$ ו־$f(9) = 68$. השתמשו במשפט הערך הממוצע של לגרנז' (פעמיים) כדי להוכיח $54 \leq f(7) \leq 62$.

פתרון: נשתמש במשפט הערך הממוצע של לגרנז' עבור $f(x)$ (הגזירה בכל $\mathbb{R}$) פעם בקטע $[1,7]$ ופעם בקטע $[7,9]$. נקבל שקיימות נקודות $c_2 \in (1,7)$, $c_1 \in (7,9)$ כך ש

$$\frac{f(9)-f(7)}{9-7} = f'(c_1) \;\Rightarrow\; \frac{68-f(7)}{2} = f'(c_1) \leq 7 \;\Rightarrow\; 68 - f(7) \leq 14 \;\Rightarrow\; f(7) \geq 54$$

$$\frac{f(7)-f(1)}{7-1} = f'(c_2) \;\Rightarrow\; \frac{f(7)-20}{6} = f'(c_2) \leq 7 \;\Rightarrow\; f(7) - 20 \leq 42 \;\Rightarrow\; f(7) \leq 62$$

ובסה"כ $54 \leq f(7) \leq 62$ כדרוש.

5. בעזרת משפט הערך הממוצע של קושי, הוכיחו כי לכל $x, y \in [0, \frac{\pi}{3}]$ מתקיים

$$|tan(x) - tan(y)| \leq 8 \cdot |sin(x) - sin(y)|$$

הוכחה: יהיו $x, y \in [0, \frac{\pi}{3}]$ כלשהם. אם $x = y$, אז שני האגפים מתאפסים ויש שוויון. אחרת, אפשר להניח כי $y < x$ (המקרה השני סימטרי). נשתמש במשפט הערך הממוצע של קושי עבור הפונקציות $f(t) = tan(t)$, $g(t) = sin(t)$ בקטע $[y, x]$. זה אפשרי כי שתי הפונקציות גזירות בקטע $[y, x]$ (המוכל בקטע $[0, \frac{\pi}{3}]$) ו־$g'(t) = cos(t) \neq 0$ שם. לפי המשפט, קיימת נקודה $c \in (y, x)$ כך ש־

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{tan(x) - tan(y)}{sin(x) - sin(y)} = \frac{\frac{1}{cos^2(c)}}{cos(c)} = \frac{1}{cos^3(c)}$$

ומכאן ש־$\left|\frac{tan(x) - tan(y)}{sin(x) - sin(y)}\right| = \frac{1}{|cos^3(c)|}$. כיוון שפונקציית הקוסינוס יורדת בקטע $[0, \frac{\pi}{3}]$, ו־$c \in (0, \frac{\pi}{3})$, נובע ש־$cos(c) \geq cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ולכן $\frac{1}{|cos^3(c)|} \leq 2^3 = 8$. לפיכך

$$\left|\frac{tan(x) - tan(y)}{sin(x) - sin(y)}\right| = \frac{1}{|cos^3(c)|} \leq 8 \Rightarrow |tan(x) - tan(y)| \leq 8 \cdot |sin(x) - sin(y)|$$

כדרוש.