

אוניברסיטת בר-אילן

מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)

מספרי הקורס: 88211

המרצה: מיכאל מגרל

המתרגלים: לואי פולב ודורון פרלמן

תאריך: 04.10.2011 מועד א'

**פתרון:**

1. א. הוכיחו את משפט Sylow 3 (הכמות של ת"ח).  
הוכחה בהרצאה.

ב. תהא  $G$  חבורה מסדר 21 כך שיש בה יותר משני איברים מסדר 3. הראו כי  $G$  לא אבלית אבל פתירה.

פתרון:

$$r_7 | 3 \wedge r_7 \equiv 1 \pmod{7} \rightarrow r_7 = 1$$

$$r_3 | 7 \wedge r_3 \equiv 1 \pmod{3} \rightarrow r_3 \in \{1, 7\}$$

אבל  $r_3 \neq 1$  כי יש יותר משני איברים מסדר 3, ולכן  $r_3 = 7$ . אבל אז חבורת 3-סילו אינה נורמלית ולכן  $G$  אינה אבלית.

פתירות נובעת מהטענה שכל חבורה מסדר  $pq$  עם  $p, q$  ראשוניים היא פתירה.

ג. חבורה  $G$  בעלת 15 אלמנטים פועלת מעל קבוצה עם 30 אלמנטים. הוכיחו או הפריכו: קיימת נקודת שבת.

פתרון:

קח חבורה  $G$  בת 30 איברים שיש בה תת חבורה  $H \leq G$  בעלת 15 איברים

$$(H := \Omega_{15} \leq G := \Omega_{30} \quad \text{(למשל שורשי יחידה)}$$

$$\text{נגדיר פעולה } H \times G \rightarrow G, h * g = hg$$

2. א. נניח  $Q := \{1, -1, i, j, k, -i, -j, -k\}$  חבורה בפעולת הכפל המוגדרת ע"י  
 $ijk = k^2 = i^2 = j^2 = -1$ .

השלימו את טבלת הכפל והוכיחו שכל ת"ח של  $Q$  היא נורמלית ב  $Q$ .

ב. מצאו תמונות אפימורפיות של  $Q$  (עד כדי איזומורפיזמים).

ג. תנו דוגמאות של 5 חבורות לא איזומורפיות עם 8 איברים.  
 פתרון:

חלק מהתשובות לשאלה זו נמצאות בתרגילים הבית או תרגילי הכיתה. למשל מיון של ת"ח והעובדה שהן כולן נורמליות ב  $Q$ .

בסעיף ב. תמונות אפימורפיות של  $Q$  (עד כדי איזומורפיזמים):

$$Q, \Omega_2, \Omega_2 \times \Omega_2, \Omega_2, \Omega_1$$

מקרים של  $Q/Q \cong \Omega_1, Q/\{e\} \cong Q$  טריוויאליים.

מקרה של  $\Omega_2 \cong Q/H$  ברור משיקולים של משפט לגרנז אחרי שיש ת"ח (נורמלית)  $H \leq Q$  עם 4 אלמנטים.

מקרה של חבורת קליין  $\Omega_2 \times \Omega_2$  מתקבל משיקולים הבאים: יש רק ת"ח אחת עם 2 איברים והיא  $H := \{1, -1\}$ . היא נורמלית ב  $Q$ .  $Q/H$  היא חבורה עם 4 איברים.

היא אבלית ולכן יש רק 2 מקרים: ציקלית או חבורת קליין. בחבורת מנה  $Q/H$  מתקיים  $[k]^2 = [i]^2 = [j]^2 = e$  לכן ב  $Q/H$  אין איבר מסדר 4. מכאן

$$Q/H \text{ איזומורפית ל } \Omega_2 \times \Omega_2.$$

בסעיף ג. התשובה היא  $C_2^3, C_4 \times C_2, C_8, D_4, Q$

( $D_4$  לא איזומורפי ל  $Q$  לפי שיעורי בית הנ"ל)

3. א. תנו דוגמה של מונואיד  $(X, \cdot)$  עם 8 איברים כך שלא קיימת חבורה המכילה את  $(X, \cdot)$  כחת מבנה.

פתרון: למשל המונואיד  $(\mathbb{N}, \cdot)$  לא יכול להיות תת מבנה של חבורה היות ולא מתקיים בו חוק הצמצום (למשל...)

ב. נגדיר פונקציה  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 3n$ . הוכיחו שבמונואיד  $(\mathbb{N}, \cdot)$   $Map(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

איבר  $f$  הוא הפיך רק מצד אחד.

פתרון: הפיכה מצד שמאל וההפכית שלה היא כל  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  המקיימת

$$g(3n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \text{ קל לראות שמתקיים } g \circ f = Id. \text{ קח למשל}$$

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(n) = [n] \text{ "חלק שלם"}$$

מצד שני, נראה ש- $f$  אינה הפיכה מימין. נניח בשלילה שכן, משמע קיימת פונקציה  $h$  כך ש- $f \circ h = Id$ . אך קל לבדוק (וגם ידוע מבידידה) כי אז  $f$  היא פונקציה על. זאת סתירה, שכן לא קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש- $f(n) = 1$ .

ג. הוכיחו את משפט Euler על החזקות ובאמצעות המשפט פתרו את המשוואה

$$127^{301} x \equiv 2011 \pmod{99}$$

פתרון: הוכחה למשפט אוילר – בהרצאה.

הפתרון לתרגיל: שימוש במשפט אוילר:  $x = 40$ .

4. א. הראו שחבורה סופית היא מסדר זוגי אם ורק אם קיים בה איבר מסדר 2. פתרון: כיוון ראשון: אם החבורה מסדר זוגי אזי לפי משפט קושי קיים בה איבר מסדר 2. כיוון שני: אם קיים איבר מסדר 2, אזי לפי משפט לגרנז' סדר החבורה חייב להיות זוגי.

ב. מצאו את כל המונומורפיזמים  $f: U_{10} \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

פתרון:  $U_{10} = \{[1], [3], [7], [9]\}$  ו- $[3]$  הוא היוצר שלה והוא מסדר 4. יש לשלוח אותו לאיבר מסדר 4 בתוך  $\mathbb{C}^*$ . זה קובע חד-משמעית את המונומורפיזם כי  $U_{10}$  ציקלית. אבל שימו לב-  $\{z \in \mathbb{C}^* : \|z\| = 1\} \cong T$ . יש במעגל היחידה בדיוק שני איברים מסדר 4  $\{i, -i\}$  ולכן יש שני מונומורפיזמים כאלה.

ג. הוכיחו שסכום ישר  $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$  הוא חבורה ציקלית אם ורק אם  $(m, n) = 1$ . פתרון: הוכחה בהרצאה עבור  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ . קח בחשבון ש  $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ .

5. א. חבורה  $S_6$  פועלת מעל חבורה  $A_6$  על ידי הצמדות. נמקו מדוע הפעולה מוגדרת היטב ומצאו את מספר המסלולים של הפעולה  $S_6 \times A_6 \rightarrow A_6$ .

פתרון: הפעולה מוגדרת היטב שכן  $A_6 \triangleleft S_6$ .

מספר המסלולים הוא מספר מחלקות הצמידות של  $A_6$ .

מספר טיפוסים ששיכים ל  $A_6$ .

בס"ה מספר טיפוסים שווה למספר חלוקות של 6 (משמאל נסמן את הזוגיות של הטיפוס)

+	6
-	5+1
+	4+2
-	4+1+1
+	3+3

$$\begin{array}{r}
- \quad 3+2+1 \\
+ \quad 3+1+1+1 \\
- \quad 2+2+2 \\
+ \quad 2+2+1+1 \\
- \quad 2+1+1+1+1 \\
+ \quad 1+1+1+1+1+1
\end{array}$$

בס"ה 11, מהם יש 6 זוגיים. לכן התשובה (מספר מסלולים) שווה 6.

ב. כמה איברים מתחלפים עם  $a = (3, 5, 1, 6)$  בחבורה  $S_8$ ?

פתרון: אנו מחפשים:  $|Stb(a)| = |\{b \in S_8 : bab^{-1} = a\}| = |\{b \in S_8 : ba = ab\}|$  (הגודל

של המייצב ביחס לפעולת ההצמדה).  $|Stb(a)| = \frac{|S_8|}{|S_8 * a|}$ . כאשר  $|S_n * a|$  הוא גודל

מחלקת הצמידות של  $a$ .  $S_n * a$  מכילה את כל המחזורים מאורך 4, ויש  $\frac{\binom{8}{4} 4!}{4}$

$$\text{כאלה. לכן: } |Stb(a)| = \frac{|S_8|}{|S_8 * a|} = \frac{8!}{\frac{\binom{8}{4} 4!}{4}} = 96$$

ג. תהא  $G$  חבורה מסדר 28. הוכיחו:  
(a) קיימת תת חבורה 7-סילו נורמלית.

(b) אם  $G$  לא אבלית אזי  $|G'| = 7$ .

(c) אם  $G$  לא אבלית ויש לה תת חבורה נורמלית מסדר 2, אזי  $G/Z(G) \cong D_7$ .

פתרון של ג' בתרגול 8.

**שאלת הבנוס: (5 נקודות)**

בניח  $F(a, b)$  מסמן חבורה חופשית מעל קבוצה  $\{a, b\}$ . הוכיחו שלכל חבורה סופית  $G$  קיימת ת"ח  $X \leq F(a, b)$  ות"ח נורמלית  $X \triangleleft H$  כך ש  $G$  איזומורפית ל  $X/H$ .

הוכיחו גם שקיימת חבורה סופית  $G$  כך שהיא לא איזומורפית לחבורת מנה של  $F(a, b)$ .

פתרון: (החלק הראשון) לפי משפט קיילי חבורה  $G$  איזומורפית לתת חבורה  $G_0 \leq S_n$  כאשר  $|G| = n$ . ז"א מספיק להוכיח את הטענה עבור  $G_0$ .

ידוע שקיימים  $\alpha, \beta \in S_n$  כך ש  $\langle \alpha, \beta \rangle = S_n$ . לכן קיים אפימורפיזם

$f: F(a, b) \rightarrow S_n$ . מכאן קיים גם אפימורפיזם  $G_0 \rightarrow f^{-1}(G_0) := X$ . לפי משפט

האיזומורפיזם הראשון נקבל  $X/H \cong G_0$ .

(החלק השני)

אם  $G$  חבורת מנה של  $F(a, b)$  אז קיים אפימורפיזם  $h: F(a, b) \rightarrow G$ . אזי

$\langle h(a), h(b) \rangle = G$ . נקבל  $\text{rank}(G) \leq 2$ . כעת מספיק לקחת  $G$  סופית עם

$\text{rank}(G) > 2$ . למשל  $G := \Omega_2^3$ .