נכתב על ידי נועם יערי

משוואות בסל

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

פתרונות המשוואה הם פונקציות בסל J_ν

אנחנו נפתור בעזרת שיטת פרובניוס בסביבה של 0 (0 היא נקודה סינגולרית רגולרית).

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} \quad \Longrightarrow (x^2-\nu^2)y(x) = -\nu^2 a_0 x^\alpha - \nu^2 a_1 x^{\alpha+1} + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-2} - \nu^2 a_n)x^{n+\alpha} \\ xy'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha} \\ x^2y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha} \end{aligned}$$

משוואת האינדקס נובעת מהמקדם של x^α:

$(a_0 \neq 0)$

$$\begin{aligned} &\alpha(\alpha-1)a_0 + \alpha a_0 - \nu^2 a_0 = 0 \\ &\alpha^2 - \nu^2 = 0 \\ &\alpha = \pm\nu \end{aligned}$$

$\underline{\alpha = \nu:}$

עבור $x^{\alpha+1}$ נקבל:

$$\begin{aligned} [(1+\alpha)\alpha + (1+\alpha) - \nu^2]a_1 &= 0 \\ \underbrace{[(1+\alpha)^2 - \nu^2]a_1}_{\substack{\text{לא יכול להתאפס} \\ \text{בגלל ש-}\alpha^2=\nu^2 \\ \alpha\geq 0}} &= 0 \end{aligned}$$

עכשיו לרקורסיה הכללית $(n \geq 2, x^{n+\alpha})$:

$$\begin{aligned} (n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n + (n+\alpha)a_n + a_{n-2} - \nu^2 a_n &= 0 \\ [(n+\alpha)^2 - \nu^2]a_n &= -a_{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{a_{n-2}}{(n+\nu)^2 - \nu^2} \\ &= -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)} \end{aligned}$$

$$a_{2n}^{+} = \frac{(-1)^n a_0}{2\cdot(2+2\nu)\cdot 4\cdot(4+2\nu)\cdots} = \boxed{\frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}\cdot n!\cdot(1+\nu)\cdots(n+\nu)}}$$

<u>$\alpha = -\nu$</u>

(כמו בפתרון הראשון, רק $\nu-$ במקום ν)

$$\boxed{a_{2n}^{-} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}\cdot n!\cdot(-\nu+1)\cdots(-\nu+n)}}$$

<u>האם הפתרונות האלו בלתי תלויים לינארית?</u>

נשים לב, כאשר $\nu \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, ההפרש בין ν לבין $\nu-$ – אינו שלם ושני הפתרונות בלתי תלויים לינארית.

נרצה לדעת גם האם הפתרונות בלתי תלויים לינארית כאשר:

- $\nu \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ – העובדה שהטורים יושבים רק במקדמים זוגיים אומר שאלו פתרונות בת״ל.
- $\nu \in \mathbb{Z}$ – שני הפתרונות מתלכדים J_n.

(איחוד של הקבוצות האלו הוא $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$)

דוגמה

$$\nu = \frac{1}{2}$$

נקבל:

$$a_{2n}^{+} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n+1)!}, \qquad a_{2n}^{-} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sin x$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-\frac{1}{2}}}{(2n)!} = \frac{1}{\sqrt{x}}\cos x$$

וסך הכל נקבל שהפתרון הכללי הוא:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(A\sin x + B\cos x)$$

הערה

לגבי $\nu \in \mathbb{Z}$ - נצטרך פתרון נוסף:

- דרך "טובה" – הורדת סדר בעזרת J_n.
- דרך "מעניינת" – הפונקציות J_ν רציפות וגזירות ביחס ל ν –. עבור $n \approx \nu$, הפתרון הכללי למשוואת בסל הוא: $y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$ ואנחנו יודעים ש – $J_{-n} = (-1)^n J_n$.
אז ניקח:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$$

$\lim_{\nu\to n\in\mathbb{Z}} Y_\nu$ – פתרון למשוואה שאינו תלוי לינארית ב – J_n

Y_n נקרא "פונקציית בסל מהסוג השני" או "פונקציית נוימן".

מקבעים את x ומחשבים לפי לופיטל:

$$\lim_{\nu\to n}\frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu} \underset{L'hopital}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \frac{-J_\nu(x)\cdot\pi\sin\pi\nu + \frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)\cdot\cos\pi\nu - \frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)}{\pi\cos\pi\nu} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\left((-1)^n\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)\right)_{\nu=n}$$

נחזור למשוואת בסל המקורית:

$$x^2 J_\nu'' + xJ_\nu' + (x^2-\nu^2)J_\nu = 0$$

נגזור את המשוואה לפי ν ונקבל:

$$x^2\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu'' + x\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu' + (x^2-\nu^2)\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu - 2\nu J_\nu = 0$$

ולכן הצירוף הלינארי שלנו פותר את המשוואה המקורית עד כדי:

$$2\nu(J_\nu - (-1)^n J_{-\nu}) \to 0$$

<u>מסקנה:</u> Y_n פותר את המשוואה ובת"ל עם J_n.