משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרופ' ג'רמי שיף

http://u.math.biu.ac.il/~schiff/Teaching/240

המבחן יהיה עם חומר פתוח

1. משוואות דיפרנציאליות רגילות(מד"ר) מסדר ראשון

הגדרה

מד"ר מסדר ראשון היא יחס מהצורה $F(x,y,y')=0(*)$ כאשר $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

דוגמאות

- $y'=0$ פונקציה קבועה
- $y'-y=0$ פתרון אפשרי - $y=e^x$
- $y'-xy=0$ פתרון אפשרי - $y=e^{\frac{x^2}{2}}$

פתרון של המד"ר (*) הוא פונקציה $y(*)$ מוגדרת על קטע $I\subset\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in I$
$F\big(x,y(x),y'(x)\big)=0$ ($y(x)$ גזירה בקטע I)

הגדרה

מד"ר מסדר ראשון בצורה <u>נורמלית</u> היא יחס מהצורה $(**)y'=f(x,y)$.

פתרון של (**) הוא פונקציה $y(x)$ כך ש$y'(x)=f\big(x,y(x)\big)$(כמו קודם, y צריכה להיות מוגדרת וגזירה על...)

דוגמאות

(1) $y'=x^2$

פתרון כללי: $y(x)=\frac{x^3}{3}+C$ C קבוע

הערה: פתרון כללי – פתרון שמכסה את כל הפתרונות האפשריים.

באופן יותר כללי

אם $y'=f(x)$ כאשר $f(x)$ פונקציה קבועה, הפתרון הכללי הוא $y(x)=\int^x f(t)dt+C$.

אחת הדרכים לקבוע את הקבוע הוא לתת אינפורמציה על הערך של y בנקודה מסויימת: כלומר לקבוע $y_0=y(x_0)$

בעיית קושי Cauchy's Problem

מד"ר מסדר ראשון בצורה נורמלית בתוספת "תנאי התחלה":
$y'=f(x,y),y(x_0)=y_0$

$y' = x^2 y$ (2)

$y=0$ הוא פיתרון. נניח $y \neq 0$(זהותית) ונחלק ב: $\frac{y'}{y} = x^2 = \overbrace{\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}}^{\text{סימון אחר}}$. נניח $y > 0$, ואז צד

שמאל הוא נגזרת של $\ln y$: $(\ln y(x))' = x^2 = \overbrace{\frac{d}{dx}\ln y(x)}^{\text{סימון אחר}}$. נוציא אינטגרל לשני הצדדים:

$$\ln y(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

$$y(x) = e^{\frac{x^3}{3}+C} = \underbrace{K}_{\substack{\text{קבוע חדש}\\ \text{חיובי}}} e^{\frac{x^3}{3}}$$

אם מניחים $y < 0$ מקבלים אותו פתרון על K שלילי. לכן הפתרון הכללי הוא $y(x) = Ke^{\frac{x^3}{3}}$ כאשר k קבוע כלשהו.

נפתור את בעיית קושי

אם יודעים $y(x_0) = y_0$ ⇦ $y_0 = Ke^{\frac{x_0^3}{3}}$ ⇦ $K = y_0 e^{-\frac{x_0^3}{3}}$ ⇦ ניתן למצוא את K.

באופן יותר כללי

$$y' = yf(x)$$

$$(y > 0), \qquad (\ln y)' = \frac{y'}{y} = f(x)$$

$$\ln y = \int^x f(t)dt + C$$

$$y = Ke^{\int^x f(t)dt}$$

K קבוע חופשי

המשוואה הזו נקראת *משוואה ליניארית הומוגנית*

$y' = f(x)g(y)$ (3) – "*משוואה ניתנת לפרידה*"

תת דוגמה

$$y' = \frac{3}{2}(y^2 - 1)x^2$$

$$\frac{2y'(x)}{y(x)^2 - 1} = 3x^2$$

$$\int \frac{2y'(x)dx}{y(x)^2 - 1} = \int 3x^2$$

נציב $z = y(x)$ ⇦ $dz = y'(x)dx$

$$\int \frac{2dz}{z^2 - 1} = x^3 + C$$

$$\int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) dz = x^3 + C$$

$$\ln(z-1) - \ln(z+1) = x^3 + C$$

$$\frac{z-1}{z+1} = e^{x^3 + C}$$

$$z - 1 = (z+1)Ke^{x^3}$$

$$z=\frac{1+Ke^{x^3}}{1-Ke^{x^3}}$$

$\boxed{y(x)=\frac{1+Ke^{x^3}}{1-Ke^{x^3}}}$, K קבוע חופשי

כאשר $K=0$ ⇦ $y(x)=+1$. כאשר $\mathrm{K}\to\infty$ ⇦ $y(x)=-1$. לכן הפתרון הכללי כולל את המקרה $y(x)=-1$

באופן יותר כללי

$$y'=f(x)g(y)$$

מחלקים ע"י $g(y)$ ומבצעים אינטגרל:

$$\int\frac{y'}{g(y)}dx=\int f(x)dx$$

מציבים $z=y(x)$:

$$\int\frac{dz}{g(z)}=\int f(x)dx+C$$

אם ניתן לעשות את האינטגרלים מוצאים יחס בין $z=y(x)$ ו-x.

<u>יש לפעמים פתרונות מיוחדים(פתרונות סינגולריים)</u>

(4) $(*)y'=yf(x)+g(x)$ *משוואה ליניארית*(מסדר ראשון)

ראינו שפתרון כללי של $y'=yf(x)$ הוא $y=Ke^{\int^x f(t)dt}$.

נחפש פתרון של (*) בצורה $y(x)=K(x)e^{\int^x f(t)dt}$. אם נקבל את הצורה הזאת, אזי:

$$y'(x)=K'(x)e^{\int^x f(t)dt}+K(x)f(x)e^{\int^x f(t)dt}=K'(x)e^{\int^x f(t)dt}+f(x)y(x)$$

כדי ש$y(x)$ יפתרון את (*), יש לקחת $K(x)$ כך ש$g(x)=K'(x)e^{\int^x f(t)dt}$

תת דוגמה

(א) $y'=\frac{y}{x}+x$

שלב הכנה - "המקרה ההומוגני"

$$y'=\frac{y}{x}$$
$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}$$
$$(\ln y)'=(\ln x)'$$
$$\ln y=\ln x+C$$
$$y=Kx$$

נציב $y(x)=K(x)x$:

$$\mathrm{K'(x)x+K(x)}=K(x)+x$$
$$\Rightarrow K'(x)=1$$
$$\Rightarrow K(x)=x+C$$
$$\Rightarrow \boxed{y(x)=x(x+C)}$$

ב) $x(1-x)y' + y = b(x)$

המקרה ההומוגני:

$$y' = \frac{y}{x(x-1)}$$
$$\frac{y'}{y} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$
$$\ln y = -\ln x + \ln(1-x) + C$$
$$y = \frac{K(1-x)}{x} = K\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

נציב $y(x) = K(x)\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

$$y(x) = K(x)\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$
$$x(1-x)\left[K'\left(\frac{1}{x} - 1\right) + K\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] + K\left(\frac{1}{x} - 1\right) = b(x)$$
$$K'(x) = \frac{b(x)}{(1-x)^2}$$

$K = \int \frac{b(x)dx}{(1-x)^2}$

ג) $y' = \lambda y + e^x$, $y(0)=1$, λ קבוע נתון.

המקרה ההומוגני: $y' = \lambda y$

$$\frac{y'}{y} = \lambda$$
$$\ln y = \lambda x + C$$
$$y = Ke^{\lambda x}$$

נציב $y(x) = K(x)e^{\lambda x}$

$$\overbrace{K'e^{\lambda x} + K\lambda e^{\lambda x}}^{y'} = \overbrace{\lambda K e^{\lambda x} + e^x}^{\lambda y + e^x}$$
$$K' = e^x e^{-\lambda x} = e^{(1-\lambda)x}$$
$$K = \begin{cases} \dfrac{e^{(1-\lambda)x}}{1-\lambda} + C & \lambda \neq 1 \\ X + C & \lambda = 1 \end{cases}$$
$$y(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{e^{(1-\lambda)x}}{1-\lambda} + C\right)e^{\lambda x} & \lambda \neq 1 \\ (x+C)e^x & \lambda = 1 \end{cases}$$

נדרוש $y(0)=1$:

$$1 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\lambda} + C & \lambda \neq 1 \\ C & \lambda = 1 \end{cases}$$

כאשר $\lambda \neq 1$

$$C = 1 - \frac{1}{1-\lambda} = \frac{-\lambda}{1-\lambda}$$
$$y(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{e^{(1-\lambda)x} - \lambda}{1-\lambda}\right)e^{\lambda x} & \lambda \neq 1 \\ (x+1)e^x & \lambda = 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{e^x - \lambda e^{\lambda x}}{1-\lambda} & \lambda \neq 1 \\ (x+1)e^x & \lambda = 1 \end{cases}$$

ראינו שיש פתרון מיוחד כאשר $\lambda = 1$. לכן אנחנו מצפים ש$\lim_{\lambda\to 1} \frac{e^x - \lambda e^{\lambda x}}{1-\lambda} = (x+1)e^x$ – כלומר שכאשר $\lambda \to 1$, הפתרון הכללי שואף לפתרון במקרה של $\lambda = 1$:

$$\lim_{\lambda\to 1} \frac{e^x - \lambda e^{\lambda x}}{1-\lambda} \underset{\text{לופטיל}}{=} \lim_{\lambda\to 1} \frac{-\left(e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}\right)}{-1} = (x+1)e^x$$

הפתרון דווקא רציף כאשר $\lambda \to 1$

*באופן כללי, פתרון של <u>**בעיית קושי**</u>(<u>**לא** של הפתרון הכללי</u>) הוא רציף כפונקציה של פרמטר(הנכנס למשוואה באופן רציף)[לא נוכיח].*

נחזור לתת דוגמה (א)

$$y' = \frac{y}{x} + x$$

פתרון כללי $\qquad y(x) = x(x + C)$

האם ניתן למצוא פתרון כך ש$y(0) = 1$?

לא – כאן $y(0) = 0$ לכל C. הסיבה לכך היא שהצד הימני - $\frac{y}{x} + x$ – אינו רציף ב$x = 0$

באופן יותר כללי: אם רוצים לפתור $y' = f(x, y)$ עם תנאי התחלה $y(x_0) = y_0$, חשוב ש$f(x, y)$ תהיה רציפה ב(x_0, y_0)

ליתר דיוק - *משפט הקיום והיחידות*

נתונה בעיית קושי $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

אם

(א) קיימים $\alpha, \beta > 0$ כך ש$f(x, y)$ רציפה ב $D = \left\{(x, y) \middle| \begin{matrix} |x - x_0| < \alpha \\ |y - y_0| < \beta \end{matrix} \right\}$

(ב) $M = \max|f(x, y)|$ קיים במלבן D

(ג) f מקיים "תנאי ליפשיץ" בD

אזי קיים פתרון אחד ויחיד $y(x)$ לבעיית קושי, המוגדרת על קטע קטן הכולל את x_0

תנאי ליפשיץ

קיים K כך שלכל (x, y), (x, z) בD, $|f(x, y) - f(x, z)| < K|y - z|$

אם $f(x, y)$ גזירה כפונקציה של y, אזי קיים תנאי ליפשיץ(גזירות היא התכונה היותר חזקה)

כאשר אין קיום ויחידות, מה קורה?

(א) $y' = \frac{y}{x} + x$

פתרון כללי $y = x(x + C)$. בהכרח $y(0) = 1$

אם אני מבקש $y(0) = 1$ – <u>אין פתרון</u>.

(ב) $y' = 2\sqrt{|y|}$

$y = 0$ $\qquad$ זה הפתרון

$y > 0$ $\qquad \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1 \Leftarrow \left(\sqrt{y}\right)' = 1 \Leftarrow \sqrt{y} = x + C \Leftarrow \mathrm{y = (x + C)^2}$

$y < 0$ $\qquad \frac{y'}{2\sqrt{-y}} = 1 \Leftarrow \left(\sqrt{-y}\right)' = -1 \Leftarrow \sqrt{-y} = -x + C \Leftarrow \mathrm{y = -(x - C)^2}$

אם $y > 0$, הפתרונות הם פרבולות מחייכות המשיקות לציר הx.

אם $y < 0$, הפתרונות הם פרבולות עצובות המשיקות לציר הx.

אם $y = 0$, הפתרון הוא ציר הx.

לכן, אם נתון לנו $y(x_0) = 0$, חוץ מהפרבולות וציר הx אפשר גם לתת

$$y = \begin{cases} (x - x_0)^2 & x \le x_0 \\ 0 & x_0 \le x \le x_1 \\ -(x - x_1)^2 & x \ge x \end{cases}$$

כלומר יורדים בפרבולה מחייכת לציר הx בנקודה x_0, ממשיכים עם ציר הx עד נקודה x_1, ושם יורדים בפרבולה בוכה. לכן יש אינסוף פתרונות.

יש גם מקרים אחרים.(אם אין קיום ויחידות – ייתכן כל מספר של פתרונות)

(5) משוואה הומוגנית

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

איך פותרים? מציבים $y(x) = z(x)z$

$$z'x + z = f(z)$$

$z' = \frac{f(z)-z}{x}$ – משוואה ניתנת לפרידה(שאנחנו כבר יודעים לפתור ע"י אינטגרציה, כמו בדוגמה (3))

תת דוגמה

$$y' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$$

נציב $y(x) = xz(x)$

$$xz' + z = \frac{1}{2}(1 + z^2)$$

$$z' = \frac{\frac{1}{2}(z + z^2) - z}{x} = \frac{(1-z)^2}{2x}$$

$$\int \frac{z'dx}{(1-z)^2} = \int \frac{dx}{2x}$$

מציבים $t = z(x)$, $dt = z'dx$

$$\frac{-1}{1-t} = \int \frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

$$z = t = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}\ln|x| + C}$$

$$\boxed{y = x\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{2}\ln|x| + C}\right)}$$