מבנים אלגבריים תרגול 7

10 במאי 2021

1 איזומורפיזמים בין חבורות

הגדרה: תהיינה G_1, G_2 חבורות. פונקציה $\varphi : G_1 \to G_2$ תיקרא הומומורפיזם אם:

$$\forall g, h \in G_1 : \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$$

מינוחים נוספים: הומ' חח"ע נקרא גם מונומורפיזם. הומ' על נקרא גם אפימורפיזם. הומ' הפיך נקרא איזומורפיזם.

תרגילים:

1. מונו' שומר סדר של איבר: יהי $\varphi : G_1 \to G_2$ מונו'. הוכיחו:

$$\forall g \in G_1 : o(g) = o(\varphi(g))$$

פתרון: נסמן $o(g) = k$, כלומר, $g^k = e_{G_1}$. צריך להוכיח שני דברים:

(א) ראשית נראה שמתקיים: $(\varphi(g))^k = e_{G_2}$:

$$(\varphi(g))^k = \varphi(g^k) = \varphi(e_{G_1}) = e_{G_2}$$

מכאן מקבלים $o(\varphi(g)) \leq k$ (גם מחלק אותו, ראו ש"ב 3 תרגיל 5).

(ב) נראה שאם $t < k$ אז $(\varphi(g))^t \neq e_{G_2}$:

$$(\varphi(g))^t = \varphi(g^t \neq e_{G_1}) \neq e_{G_2}$$

כי הומ' חח"ע שולח רק את איבר היחידה לאיבר היחידה. לכן אם $g^t \neq e_{G_1}$ אז תמונתו מקיימת $\varphi(g^t) \neq e_{G_2}$.

הערה: שימו לב שבחלק הראשון לא השתמשנו בחח"ע. זאת אומרת שלכל הומ' מתקיים: $o(\varphi(g)) \leq o(g)$.

2. אפימורפיזם שומר אבליות: יהי $\varphi : G_1 \to G_2$ אפימורפיזם. הוכיחו: אם G_1 אבלית אז גם G_2 אבלית.

פתרון: נניח G_1 אבלית. נוכיח ש־ G_2 אבלית: יהיו $x, y \in G_2$, צריך להראות $xy = yx$. מכיון שזהו אפי' יש $g, h \in G_1$ כך ש־ $\varphi(g) = x, \varphi(h) = y$, ולכן:

$$xy = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(gh) = \varphi(hg) = \varphi(h)\varphi(g) = yx$$

3. הוכיחו:

$$n \neq m \in \mathbb{N} \Rightarrow S_n \ncong S_m$$

פתרון: מכיון שעבור $n \neq m$ מתקיים $|S_n| = n! \neq m! = |S_m|$, ולכן אין פונקציה הפיכה $f : S_n \to S_m$ ובפרט אין הומ' הפיך.

4. הוכיחו: $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4 \ncong S_4$.

פתרון: נובע מכך שהימנית לא אבלית והשמאלית כן. נניח בשלילה שיש $\varphi : \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4 \to S_4$ איזו', בפרט נקבל שהוא על, ומתרגיל 2 בצירוף לעובדה ש־$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4$ אבלית, נקבל שגם החבורה S_4 אבלית, בסתירה.

5. האם $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_4$?

פתרון: לא. הימנית ציקלית והשמאלית לא. נב"ש שיש $\varphi : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ איזו', ובפרט חח"ע. כידוע הסדר של 1 של $\mathbb{Z}_4$ הוא 4. לפי זה בצירוף לשאלה 1 צריך להתקיים $o\left(\varphi(1)\right) = 4$ אבל ב־ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ כל האיברים (למעט היחידה) מסדר 2, בסתירה.

הערה: אין עוד חבורות מסדר 4, עד כדי איזו'.

6. הוכיחו: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$.

פתרון: באופן כללי, אם G צקילית, וH חבורה כלשהי. אז ניתן להגדיר הומ' $f : G \to H$ ע"י שליחת יוצר. נניח $G = \langle g \rangle$, ויהי $h \in H$, אם נגדיר $f(g) = h$, אז לכל $g' \in G$ נדע לאן נשלח: הציקליות של G אומרת שיש k כך ש־ $g' = g^k$, ולכן:

$$f(g') = f(g^k) = h^k$$

אצלנו: ניקח יוצר של $\mathbb{Z}_6$, נניח 1, ונשלח אותו ליוצר של $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, למשל $(1,1)$. ונראה מה קורה:

$$1 \mapsto (1,1)$$

$$2 \mapsto (1,1) + (1,1) = (0,2)$$

$$3 \mapsto 3 \cdot (1,1) \equiv (1,0)$$

$$4 \mapsto 4 \cdot (1,1) \equiv (0,1)$$

$$5 \mapsto 5 \cdot (1,1) = (1,2)$$

$$6 \equiv 0 \mapsto 6(1,1) \equiv (0,0)$$

וקיבלנו איזו'.

7. כמה הומ' יש $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$?

פתרון: יוצר של $\mathbb{Z}_n$ הוא 1. נניח שנשלח אותו ל-$a \in \mathbb{Z}$. לכן לכל $t \in \mathbb{Z}$ צריך להתקיים:

$$\varphi(t \cdot 1) = t \cdot \varphi(1)$$

ועבור n נקבל:

$$0 = \varphi(0) = \varphi(n \cdot 1) = n \cdot \varphi(1) = n \cdot a$$

ולכן מתחייב $a = 0$, ולכן היוצר נשלח לאיבר היחידה וכך גם כל איברי $\mathbb{Z}_n$. זהו ההומ' הטריוויאלי.