

תרגיל 10 בפונקציות מרוכבות

1. תהי $g(z)$ פונקציה אנליטית ב $\{z \mid |z| \leq 1\}$ המקיימת כי $|g(z)| < 1$ על המעגל $|z| = 1$. הוכיחו כי קיימת z אחת ויחידה בכדור היחידה שבה $g(z) = z$.

2. יהי $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ פולינום. הוכיחו כי חייבת להיות נקודה z עם $|z| = 1$ שבה $|p(z)| \geq 1$.

3. חשבו את

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=4} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

כאשר

$$f(z) = e^{2z}(z-1)^3(z-2)^4(z-3)^{-5}(z-5)^{-3}$$

4. תהי $f(z)$ העתקת מוביוס המעתיקה את עיגול היחידה לעצמו ומקיימת $f(0) = 0$. הוכיחו כי $f(z) = az$ כאשר $|a| = 1$.