דף נוסחאות וחומר נוסף לשימוש במבחן

<u>הגדרה :</u> פונקצית קבוצות $P:\Sigma \to R$ נקראת **פונקצית הסתברות** מעל (Ω,Σ) אם

1. $\forall A\in\Sigma, P(A)\geq 0$, $P(\Omega)=1$, P היא σ-אדיטיבית.

פונקציה $f:\Omega\to R$ נקראית **מדידה** אם $f^{-1}(A)$ מדידה לכל קבוצת בורל A.

אי שוויון צבישב : לכל $1\leq p<\infty$ מתקיים $P(|x|\geq\lambda)\leq\frac{1}{\lambda^p}E[|x|^p]$.

שונות משותפת $\operatorname{cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$.

<u>הגדרה :</u> תהי $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת אירועים. $\{A_n \text{ i.o.}\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$

<u>למה :</u> **בורל-קנטלי** 1 : תהי $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת אירועים. אם $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$ אז $P\left[A_n \text{ i.o.}\right]=0$.

2 : תהי $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת אירועים בלתי תלויים . אם $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$ אז $P[A_n\ i.o.]=1$

<u>משפט :</u> **חוק המספרים הגדולים** (גרסה חזקה)

תהי $X_1,X_2,\ldots$ סדרת מ"מ ב"ת עם התפלגות זהה וממוצע סופי $E[X_i]=m$, אז

$P\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=m\right]=1$.

<u>הגדרה :</u> **<u>פונקציות אופייניות:</u>** $\phi(t)=E[e^{itX}]$. <u>דוגמה :</u> נורמלית $e^{-\sigma^2t/2}$,

<u>משפט :</u> **חוק המספרים הגדולים**, גרסה חלשה.

תהי $X_1,X_2,\ldots$ סדרת מ"מ ב"ת עם התפלגות זהה וממוצע סופי $E[X_i]=m$, אז הסדרה

$S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ מתכנסת בהתפלגות להסתברות המנוונת ב m.

<u>משפט :</u> **הגבול המרכזי**.

תהי $X_1,X_2,\ldots$ סדרת מ"מ ב"ת עם התפלגות זהה ושונות סופית $\operatorname{var}[X_i]=\sigma^2$, אז הסדרה

$S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)$ מתכנסת בהתפלגות ל $N(0,\sigma^2)$.

תוספת עם חזרה לשרשראות מרקוב

הגדרה : שרשרת מרקוב בדידה מעל מרחב בן מנייה *S* היא סדרת מ״מ $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ המקיימים

$$P\left(X_{n+1}=j \mid X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n\right)=P\left(X_{n+1}=j \mid X_n=i_n\right).$$

הגדרה : שרשרת מרקוב בדידה נקראת הומוגנית אם $P\left(X_{n+1}=j \mid X_n=i_n\right)$ לא תלוי ב n.

הגדרה : מטריצת המעבר $P_{ij}=P\left(X_{n+1}=j \mid X_n=i\right)$. מקיימת $P_{ij}\geq 0$, $\sum_{i=0}^{\infty}P_{ij}=1$.

הגדרה : $P_{ij}^0=\delta_{ij}$, $P_{ij}^n=P\left(X_n=j \mid X_0=i\right)$. למה : n $r=0\ldots$, $P_{ij}^n=\sum_{k\in S}P_{ik}^rP_{kj}^{n-r}$.

הגדרה : מצב *j* נקרא נגיש (accessible) ממצב *i* אם $\exists n\geq 0, P_{ij}^n>0$. נסמן $i\to j$.

הגדרה : מצבים *i* ו *j* נקראים מתקשרים (communicating) אם $i\to j$ וגם $j\to i$. נסמן $i\leftrightarrow j$

טענה : $\leftrightarrow$ הוא יחס שקילות. מחלקות השקילות נקראות מחלקות קשירות.

הגדרה : שרשרת עם מחלקת קשירות אחת נקראת בלתי פריקה (irreducible).

הגדרה : המחזור (period) של מצב *i*, מסומן $d(i)$ הוא

אם הקבוצה ריקה אז $d(i)=0$.

הגדרה : שרשרת בה לכל המצבים מחזור 1 נקראת אי-מחזורית (aperiodic).

שימו לב – לא הכל בדפים. לא פרטתי פה למשל על איך למצוא התפלגות סטציונרית, איך לחשב הסתברויות פגיעה, איך לחשב זמני פגיעה.

כמובן ההוכחות לא פה, וגם לא חלק מהלמות (כמו ה upcrossings). (תסתכלו במיקוד)

פרקולציה:

יהא *G= (V,E)* גרף אינסופי. פרקולצית קשתות ברנולי – *p* על *G*, או בקיצור פרקולצית *p* על *G* היא תת-גרף מקרי G_p של *G* עם אותו סט קודקודים ובו כל קשת $e \in E$ נמצאת ב G_p בסיכוי *p* באופן בלתי תלוי עבור קשתות שונות.

לקשתות שב G_p נקרא קשתות פתוחות ולקשתות ב *G* שאינן ב G_p נקרא קשתות סגורות.

בהנתן מאורע *A* נסמן ב $P_p(A)$ את ההסתברות שהמאורע *A* קורא ב G_p

נסמן ב A_∞ את המאורע שקיים רכיב קשירות אינסופי ב G_p.

טענה: לכל *G* ולכל $0 \le \mathrm{p} \le 1$ $P_p(A_\infty) \in \{0,1\}$

טענה: $P_p(A_\infty)$ מונוטונית עולה (חלש) ב *p*. (למען האמת זה נכון לכל מאורע מונוטוני *A*)

טענה: קיימת הסתברות קריטית $p_c = p_c(G)$ כך שלכל $p > p_c$ מתקיים $P_p(A_\infty) = 1$ ולכל $p < p_c$ מתקיים $P_p(A_\infty) = 0$.

פרקולציה על השריג Z^d : מתקיים $\frac{1}{2d-1} \le p_c(Z^d) \le \frac{2}{3}$ ובפרט $0 < p_c(Z^d) < 1$

משפט: $p_c(Z^2) = \frac{1}{2}$

טענה: אם *A*מאורע אינווריאנטי להזזות אז $P_p(A) \in \{0,1\}$.

מסקנה: לכל *p* ולכל *d* קיים $k \in \{0,1,2,\dots\} \cup \{\infty\}$ כך ש

$$P_p(\text{there are exactly } k \text{ infinite connected components in percolation on } Z^d) = 1$$

משפט: בעצם k חייב להיות 0 או 1.

תוספת למרטינגלים

משפט (אי שוויון מקסימלי): אם $\{X_n\}_{n\ge0}$ סאב-מרטינגל חיובי אז לכל N>0 ולכל $\lambda > 0$ מתקיים

$$\lambda \mathrm{P}(\max_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda) \le E[X_N]$$

צימודים: צימוד של שתי התפלגויות υ, μ הוא התפלגות משותפת של זוג משתנים מקריים (X, Y) כך ש- $X\sim\mu$ ו $Y\sim\upsilon$.

טענה: לכל p ניתן למצוא צמוד (X,Y) של שתי התפלגויות ברנולי $\frac{1}{2}$ כך ש $\mathrm{P}(X = Y) = p$