שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: פרופ' מגרל
מתרגל: מני שלוסברג

תרגיל בית 5

שאלה 1

א. נתבונן ב- $\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$. נאמר ש- $C\subseteq\mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה אם $C=A\bigcup T$ כאשר: A היא תת קבוצה סגורה של $\mathbb{R}$ בטופולוגיה האוקלידית, ו- T היא תת קבוצה כלשהי של S. הוכיחו שהמשלימים של הקבוצות הסגורות הללו יוצרים טופולוגיה על $\mathbb{R}$.
הדרכה: קודם כל, תוכיחו שזאת טופולוגיה ע"י כך שתראו את שלוש התכונות על קבוצות סגורות (ולא הפתוחות). שנית, כאשר תוכיחו שחיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא סגור, היעזרו בכך שמתקיים:

$$C=\bigcap_{i\in I}\left(A_i\bigcup T_i\right)=\bigcap_{i\in I}A_i\cup\left(C\setminus\bigcap_{i\in I}A_i\right).$$

ב. נתבונן בקבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ ולכל $n\in\mathbb{Z}$ נגדיר $O_n=\{n,n+1,n+2,\dots\}$. נסמן $\tau=\{\varnothing,\mathbb{Z}\}\cup\{O_n:n\in\mathbb{Z}\}$. הוכיחו:

1. $(\mathbb{Z},\tau)$ מרחב טופולוגי.
2. $(\mathbb{Z},\tau)$ אינו מטריזבילי.

שאלה 2

שאלה זו מציגה את הוכחתו הטופולוגית של פרופ' פורסטנברג לקיומם של אינסוף מספרים ראשוניים. **מותר ורצוי להשתמש במה שהוכחנו בתרגול לגבי טופולוגיה זו.**

כזכור, סדרה חשבונית דו צדדית היא קבוצה $S=a+d\mathbb{Z}=\{a+dk \mid k\in\mathbb{Z}\}$ $(a\in\mathbb{Z},\quad d\in\mathbb{N})$. נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה הבאה: $O\in\tau$ אם"ם לכל $x\in O$ יש סדרה חשבונית דו צדדית $S=x+d\mathbb{Z}$ כך ש- $x\in S\subseteq O$.

1. הוכיחו כי $\bigcup p\mathbb{Z}=\mathbb{Z}-\{1,-1\}$ (האיחוד הוא על כל המספרים הראשוניים).
2. הוכיחו כי $\mathbb{Z}-\{1,-1\}$ אינה סגורה.
3. הסיקו כי ישנם אינסוף מספרים ראשוניים.

<u>שאלה 3</u>

תזכורת:

תהי Y קבוצה כלשהי, ותהי $p\notin Y$ ויהי $X=\{p\}\cup Y$. נגדיר $\tau=\left\{O\subseteq X : p\notin O \ \vee\ \left|O^c\right|\le\aleph_0\right\}$.

א. הוכיחו ש-(X,τ) הוא מרחב טופולוגי.
ב. נניח ש- $|X|\le\aleph_0$. הוכיחו כי $\tau=\tau_{disc}$.
ג. בתנאי סעיף ב', האם (X,τ) מטריזבילי?

<u>שאלה 4</u>

<u>תזכורת</u>

נתבונן ב-$\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה T הבאה:

קבוצה היא פתוחה אם היא איחוד של קבוצות מהצורה $[a,b)$ (זהו הישר של סורגנפריי).

א. הוכיחו כי T אכן טופולוגיה.

ב. הוכיחו שהטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$, שנסמנה להלן ב τ (המתקבלת ע"י המטריקה הרגילה), מקיימת $\tau \subset T$ (הכלה אמיתית!).

ג. הוכיחו שהסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ מתכנסת בטופולוגיה של סורגנפריי.

שאלה 5

א. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. הראו שהתנאים הבאים שקולים:

1. (X,τ) מ"ט טריוויאלי.

2. לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ ולכל $x \in X$ מתקיים $x_n \xrightarrow{\tau} x$.

ב. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי עם הטופולוגיה הקו-סופית. תהי $\{x_n\}$ סדרה שכל איבריה שונים. הוכיחו כי לכל $x \in X$ מתקיים $x_n \xrightarrow{\tau} x$.

ג. תהי $X=\{a,b\}$, $\tau=\{\varnothing,\{a\},X\}$ (זהו מרחב Sierpinski). מצאו את **כל** הסדרות המתכנסות לגבול יחיד ואת **כל** הסדרות המתכנסות לשני גבולות במרחב (X,τ). הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 6

א. תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X הכוללת את כל תתי הקבוצות האינסופיות (אך לא בהכרח רק את אלה). הראו ש (X,τ) היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

ב. יהי X מצוייד בטופולוגיה הקו-סופית. נניח שקיימות במרחב לפחות 3 קבוצות סגורות. הראו ש X סופית.

ג. תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X עם התכונה הבאה: הקבוצה האינסופית היחידה שהיא פתוחה היא X עצמה. האם τ היא בהכרח הטופולוגיה הטריוויאלית? נמקו את תשובתכם.

בהצלחה!