תרגיל 7

1. תהי X קבוצה אינסופית ו$x_0 \in X$. נגדיר על X את הטופולוגיה הבאה:
$\tau = \{O \subseteq X : x_0 \notin O\} \cup \{O \subseteq X : |O^c| < \infty\}$.

(א) הוכיחו שזאת אכן טופולוגיה.
פתרון:
א. $\emptyset \in \tau$ כי $x_0 \notin \emptyset$, ו$X \in \tau$ כי $|X^c| = |\emptyset| = 0 < \infty$.
ב. יהיו O_i קבוצות פתוחות. אם באף אחת מהן אין את x_0, אז $x_0 \notin \bigcup O_i$, ולכן $\bigcup O_i$ פתוח. אחרת, יש j כך ש $|O_j^c| < \infty$. ידוע ש $(\bigcup O_i^c) \subseteq O_i^c$ ולכן סופי. כלומר, האיחוד פתוח.
ג. יהיו O_1, O_2 קבוצות פתוחות. אם באחת מהן אין את x_0, אז $x_0 \notin O_1 \cap O_2$, ולכן החיתוך פתוח. אחרת, לשתיהן יש משלים סופי, ואז $|(O_1 \cap O_2)^c| = |O_1^c \cup O_2^c| \leq |O_1^c| + |O_2^c| < \infty$.

(ב) הוכיחו שכל הנקודונים בה סגוחים, פרט ל$\{x_0\}$. מה ניתן להגיד על $\{x_0\}$?
פתרון:
יהי $x \neq x_0$. אז $\{x\}$ פתוח, כי $x_0 \notin \{x\}$, וכן $\{x\}$ סגור כי הוא סופי. $\{x_0\}$ סגור כי הוא סופי, אבל לא פתוח, כי הוא עונה על אף אחד מהתנאים.

(ג) הראו ש:

$$cl(A) = \begin{cases} A & |A| < \infty \\ A \cup \{x_0\} & otherwise \end{cases}$$

$$int(A) = \begin{cases} A & |A^c| < \infty \\ A \setminus \{x_0\} & otherwise \end{cases}$$

פתרון:
נתחיל מהסגור.
ראשית, נשים לב שקבוצה היא סגורה אם היא סופית, או אן יש בה את x_0.
אם A סופית, אז היא סגורה, ולכן היא שווה לסגור של עצמה. אחרת, אם $x_0 \in A$ אז A סגורה ולכן שווה לסגור של עצמה. במקרה זה $A = A \cup \{x_0\}$. ואם $x_0 \notin A$, אז $A \cup \{x_0\}$ היא הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את A, ולכן שווה לסגור של A.
לגבי הפנים:

אם A^c סופית, אז A פתוחה ולכן שווה לפנים של עצמה. אחרת, אם $x_0 \notin A$ אז A פתוחה ולכן שווה לפנים של עצמה. במקרה זה $A = A \setminus \{x_0\}$. ואם $x_0 \in A$, אז $A \setminus \{x_0\}$ היא הפתוחה הגדולה ביותר שמוכלת בA ולכן שווה לפנים של A.

2. יהי X מ"ט, $A \subseteq X$, ותהי $\chi_A : X \to \{0,1\}$ פונקציה אופיינית, המוגדרת ע"י

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

(א) הוכיחו שאם χ_A רציפה בx, אז $x \notin \partial(A)$.
פתרון:
נזכיר כי $\partial(A) = cl(A) \setminus int(A)$.
נחלק למקרים. אם $x \in A$, אז $\chi_A(x) = 1$. מכיוון שהפונקציה רציפה בx, יש $x \in O$ פתוחה כך ש $\chi_A(O) = 1$. כלומר, $O \subseteq A$. וזה אומר ש$x \in int(A)$. בפרט, $x \notin \partial(A)$.
אם $x \notin A$ אז $\chi_A(x) = 0$. מכיוון שהפונקציה רציפה בx יש $x \in O$ פתוחה כך ש $\chi_A(O) = 0$. כלומר, $O \subseteq A^c$. וזה אומר ש $x \notin cl(A)$. בפרט, $x \notin \partial(A)$.

(ב) הוכיחו שχ_A רציפה $\Longleftrightarrow \partial(A) = \emptyset \Longleftrightarrow A$ סגוחה.
פתרון:
לפי סעיף א' ומה שהוכחנו בתרגול, χ_A רציפה בx אמ"ם $x \notin \partial(A)$. כלומר, χ_A רציפה אמ"ם ציפה בכל x, אמ"ם לכל $x \in X$ $x \notin \partial(A)$ אמ"ם $\partial(A) = \emptyset$.
כעת נוכיח את טענת העזר הבאה ובזה נסיים: $\partial(A) = \emptyset \Longleftrightarrow A$ סגוחה.
$\Longrightarrow$ אם A סגוחה, אז היא סגורה ולכן $A = cl(A)$. מצד שני היא פתוחה ולכן $A = int(A)$. כלומר, $\partial(A) = cl(A) \setminus int(A) = A \setminus A = \emptyset$.
$\Longleftarrow$ תמיד מתקיים $int(A) \subseteq A \subseteq cl(A)$, ולכן אם $\partial(A) = \emptyset$אז$int(A) =$ $cl(A)$ וזה אומר ש$cl(A) = int(A) = A$. כלומר, A פתוחה וסגורה $\Longleftarrow A$ סגוחה.

(ג) הסיקו שאם X לא קשיר, אז קיימת פונקציה רציפה ועל $f : X \to \{0,1\}$.
פתרון:
אם X לא קשיר אז קיימת קבוצה A סגוחה לא טריוויאלית. אז χ_A היא הפונקציה המבוקשת.

3. יהי X מ"ט ותהיינה $A, B \subseteq X$ שתי תתי קבוצות.

(א) הוכיחו כי מתקיים $cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B)$
פתרון:
$A \cap B \subseteq A, B$ ולכן $cl(A \cap B) \subseteq cl(A), cl(B)$. כלומר, $cl(A \cap B) \subseteq$ $cl(A) \cap cl(B)$.

(ב) הראו ע"י דוגמא נגדית כי לא ניתן להחליף את ההכלה בשוויון.
פתרון:
$A = (0,1), B = (1,2)$. אזי: $A \cap B = \emptyset \Longleftarrow cl(A \cap B) = \emptyset$. לעומת זאת, $cl(A) = [0,1], cl(B) = [1,2] \Longleftarrow cl(A) \cap cl(B) = \{1\}$.

(ג) נסחו טענה דומה (כמו בסעיף א') עבור $int(A\cup B)$.
פתרון:

$int(A)\cup int(B)\subseteq int(A\cup B)$. הוכחה: $A,B\subseteq A\cup B$ ולכן $int(A)\cup int(B)\subseteq int(A\cup B) \Leftarrow int(A), int(B)\subseteq int(A\cup B)$. גם כאן אין שוויון. דוגמא: $A=[0,1], B=[1,2]$. אז: $int(A)\cup int(B)=(0,1)\cup(1,2) \Leftarrow int(A)=(0,1), int(B)=(1,2)$. לעומת זאת, $int(A\cup B)=(0,2) \Leftarrow A\cup B=[0,2]$.

4. יהיו X,Y מ"ט ו$f:X\to Y$ הומיאומורפיזם. הוכיחו כי לכל $A\subseteq X$ מתקיים:

(א) $f(int(A))=int(f(A))$.
פתרון:

($\subseteq$) כיוון ש $int(A)\subseteq A$ מתקיים $f(int(A))\subseteq f(A)$ ו $f(int(A))$ פתוחה כי f המו' נקבל ש $f(int(A))\subseteq int(f(A))$. מצד שני, יהי $x\in int(f(A))$. כלומר, יש O פתוחה כך ש $x\in O\subseteq f(A)$. נזכיר שבגלל שf חח"ע ועל, יש לx מקור יחיד. בגלל ש f רציפה, יש U פתוחה כך ש $f^{-1}(x)\subseteq U$ וגם $f(U)\subseteq f(A)$. מהחח"ע של f, זה אומר ש $U\subseteq A$. כלומר, $x\in f(int(A)) \Leftarrow f^{-1}(x)\in int(A)$.

(ב) $f(cl(A))=cl(f(A))$.
פתרון:

נשתמש בסעיפים א',ב' ו ג'.

$f(cl(A))=f(int(A^c)^c)=f(int(A^c))^c=int(f(A^c))^c=cl(f(A^c)^c)=cl(f(A))$. שימו לב, השתמשנו בכך שכאשר f חח"ע ועל, אז $f(B^c)=f(B)^c$.

(ג) $int(A)^c=cl(A^c)$
פתרון:

$x\in cl(A^c) \iff$ לכל סביבה פתוחה O של x, $O\cap A^c\neq\emptyset \iff O\nsubseteq A \iff$ לא קיימת לx סביבה שמוכלת ב$A \iff x\notin int(A)$.

(ד) $cl(A)^c=int(A^c)$
פתרון:

הטענה שקולה לכך ש $cl(A)=int(A^c)^c$. וזה נובע מהטענה הקודמת כאשר במקום A מציבים A^c . (שימו לב שהטענה בסעיף ג' נכונה לכל קבוצה.)

5. יהי X מ"ט, $U\subseteq X$ קבוצה פתוחה, ו$A\subseteq X$ קבוצה צפופה.

(א) הוכיחו: $U\subseteq cl(A\cap U)$ והסיקו $cl(U)=cl(A\cap U)$.
פתרון:

תהי $x\in U$. נוכיח ש$x\in cl(A\cap U)$. תהי O סביבה פתוחה של x. $O\cap(A\cap U)=A\cap(O\cap U)$. מכיוון ש$U$ פתוחה, $O\cap U$ פתוחה. ולכן, מכיוון שA צפופה, $A\cap(O\cap U)\neq\emptyset$. כלומר, $O\cap(A\cap U)\neq\emptyset$.

כעת נעבור למסקנה. מצד אחד, $U\subseteq cl(A\cap U)$, ו$cl(A\cap U)$ היא קבוצה סגורה, ולכן $cl(A)\subseteq cl(A\cap U)$. מצד שני, $A\cap U\subseteq U$, ולכן $cl(A\cap U)\subseteq cl(U)$. מסקנה: $cl(A\cap U)=cl(U)$.

(ב) אפיינו את המרחבים הטופולוגיים בהם הקבוצה הצפופה היחידה היא כל המרחב. הוכיחו את תשובתכם.
פתרון:

זאת תכונה שמאפיינת מרחבים דיסקרטיים.

ראשית, נוכיח שבמרחב דיסקרטי הקבוצה הצפופה היחידה היא X. תהי A כך ש$cl(A) = X$. במרחב דיסקרטי כל קבוצה היא סגורה, לכן $cl(A) = A$, כלומר $A = X$.

מצד שני, נניח שX מקיים את התכונה הזו. יהי $x \in X$. $A = X \setminus \{x\}$ אינו צפוף, ולכן $cl(A) = A$. (כי הקבוצה היחידה שמכליה את A ומוכלת בX שאינה X היא A). כלומר, A סגור. $\Longleftarrow$ $\{x\}$ פתוח $\Longleftarrow$ כל הנקודונים פתוחים $\Longleftarrow$ המרחב דיסקרטי.

6. הוכיחו שבמרחב נורמי, לכל כדור מתקיים $cl(B(a,r)) = B[a,r]$. תנו דוגמא לכך שבמרחב מטרי כללי הטענה לא נכונה.
פתרון:

ראשית, ניתן דוגמא נגדית. ב$\mathbb{N}$ $B(1,1) = \{1\}$ זאת קבוצה סגורה, ולכן שווה לסגור של עצמה, ואילו $B[1,1] = \{1,2\}$. כלומר, הכדור הסגור לא שווה לסגור של הכדור הפתוח.

כעת, נוכיח את הטענה למרחב נורמי. נעשה זאת באמצעות הכלה דו כיוונית.

$cl(B(a,r)) \subseteq B[a,r]$: נכון בכל מרחב מטרי, כי הכדור הסגור הוא קבוצה סגורה שמכליה את הכדור הפתוח, ולכן מכילה את הסגור שלו.

$B[a,r] \subseteq cl(B(a,r)$: לא נכון בכל מרחב מטרי. נוכיח ע"י כך שנראה שכל איבר בכדור הסגור הוא גבול ש סדרה מהכדור הפתוח. יהי $x \in B[a,r]$. כלומר, $||x-a|| \leq r$. נקח $x_n = (1-\frac{1}{n})x + \frac{a}{n}$. קל לראות ש $x_n \to x$. בנוסף, $||x_n - a|| = ||(1-\frac{1}{n})(x-a)|| = (1-\frac{1}{n})||x-a|| < r$. כלומר, $\{x_n\} \subseteq B(a,r)$.

7. תהי X קבוצה ו$\tau_1 \subseteq \tau_2$ שתי טופולוגיות עליה. הוכיחו:

(א) F סגורה בτ_1 $\Longleftarrow$ F סגורה בτ_2.
פתרון:
F סגורה בτ_1 $\Longleftarrow$ $F^c \in \tau_1$ $\Longleftarrow$ $F^c \in \tau_2$ $\Longleftarrow$ F סגורה בτ_2.

(ב) נסמן ב$cl_{\tau_i}(A)$ את הסגור של A בטופולוגיה τ_i, וכן לגבי $int_{\tau_i}(A)$. הוכיחו או הפריכו:
$int_{\tau_1}(A) \subseteq int_{\tau_2}(A)$, ו$cl_{\tau_2}(A) \subseteq cl_{\tau_1}(A)$.
פתרון:

לגבי הפנים: הוכחה: יהי $O = int_{\tau_1}(A)$. אז $O \subseteq A$ וכן O פתוח בτ_1. מההכלה נקבל ש O פתוח גם בτ_2. כעת, מהגדרת הפנים בτ_2, בתור הקבוצה הכי גדולה בA, $O \subseteq int_{\tau_2}(A)$.

לגבי הסגור: הוכחה: יהי $C = cl_{\tau_1}(A)$. אז $A \subseteq C$ וכן C סגורה בτ_1. מההכלה וסעיף א' נובע ש C סגורה גם בτ_2. כעת, מהגדרת הסגור בτ_2 בתור הקבוצה הסגורה הכי קטנה שמכילה את A, נקבל $cl_{\tau_2}(A) \subseteq C$.

(ג) השתמשו בסעיפים הקודמים, וכן במה שידוע על היחס בין הישר של סורגנפריי והטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}$, כדי לחשב את הפנים והסגור של הקבוצות הבאות:

$(0,1),[0,1),(0,1],[0,1]$.

פתרון:

$(0,1)$: זאת קבוצה פתוחה ולכן היא שווה לפנים של עצמה. לפי סעיף ב', בהכרח מתקיים שהסגור מוכל ב$[0,1]$. קל לראות ש0 שייך לסגור, כי כל סביבה שלו נחתכת עם $(0,1)$. לעומת זאת, ל1 יש סביבה שלא נחתכת עם $(0,1)$: $[1,2)$ למשל. לכן, $cl(0,1)=[0,1)$.

$[0,1)$: זאת קבוצה סגוחה ולכן היא שווה גם לפנים וגם לסגור של עצמה.

$(0,1]$: הסגור מוכל ב$[0,1]$. כמו שכבר ראינו בקבוצה הראשונה, 0 שייך לסגור, ולכן $cl(0,1]=[0,1]$. הפנים מכיל את $(0,1)$. 1 היא לא נקודה פנימית כי כל סביבה שלה מכילה קטע מהצורה $[1,x)$, ולכן $int(0,1]=(0,1)$.

$[0,1]$: זאת קבוצה סגורה ב$\mathbb{R}$ ולכן גם בישר של סורגנפריי, לכן היא שווה לסגור של עצמה. $[0,1)$ היא קבוצה פתוחה בתוכה, ולכן מוכלת בפנים. אולם, כמו שגבר ראינו, 1 הוא לא נקודה פנימית, לכן $int[0,1]=[0,1)$.