הרצאה XXIII- אינפי 1

משפט: (הכללה) תהי $f\in D^n(a,b)$ כאשר $x_0\in(a,b)$. נניח ש $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{n-1}(x_0), f^{(n)}(x_0)\neq 0$. אז:

1. אם $n=2k+1$ אין קיצון בx_0.
2. אם $n=2k$ אזי x_0 נקודת קיצון מקומית ועבור $f^{(2k)}(x_0)>0$ הנקודה היא מינימום מקומי, ואם $f^{(2k)}(x_0)<0$ אזי היא מקסימום מקומית.

הוכחה: מתקיים $f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\varepsilon(x)(x-x_0)^n$ עבור $\varepsilon(x)\to_{x\to x_0}0$. נעביר אגפים כדי לקבל את הביטוי $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\varepsilon(x)\right)$. לפי הגדרה מתקיים $\exists\delta>0\ \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ומכאן שמתקיים $|\varepsilon(x)|<\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{2n!}\right|$ וגם $|x-x_0|<\delta$ לכן הסימן של $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\varepsilon(x)$ הוא אותו סימן כמו של $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

לכן, עבור $n=2k+1$ (אי זוגי), מתקיים $\begin{matrix}x<x_0, (x-x_0)^n<0\\ x>x_0, (x-x_0)^n>0\end{matrix}$ ולכן $\begin{matrix}x<x_0, f(x)-f(x_0)<0\\ x>x_0, f(x)-f(x_0)>0\end{matrix}$ ז"א שאין קיצון.

נביט ב$n=2k$: באופן דומה, $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^{2k}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\varepsilon(x)\right)$. לכן עבור $f^{(n)}(x_0)>0$ מתקיים שעבור x ששונה מx_0, $f(x)>f(x_0)$, ולכן היא מינימום ממש. ועבור $f^{(n)}(x_0)<0$ מתקיים שעבור x ששונה מx_0, $f(x)<f(x_0)$, ולכן היא מינימום ממש. מ.ש.ל. ■

דוגמא: $f(x)=x^3$. מתקיים שהנגזרת הרביעית היא חיובית, ולכן הנקודת קיצון היא מינימום.

חקירות קיצונים: נניח $f\in C[a,b]\cap D(a,b)$ וגם ש$\exists x_{max},x_{min}\in[a,b]$. מתקיים $f(x_{max})=\max_{x\in[a,b]}f(x)$ ובאופן דומה $f(x_{min})=\min_{x\in[a,b]}f(x)$. גם כן מתקיים: שעבור כל נקודה קריטית מ(a,b) מתקיים $f'(x)=0$.

דוגמא 1: $f(x)=x+\frac{1}{x}$. תחום ההגדרה הוא $\frac{1}{a}\le x\le a$ כאשר ידוע ש$a>1$. כמה שווה $\max f(x)=?$.

פתרון: ידוע ש$f(a)=f\left(\frac{1}{a}\right)$ וגם ש$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=0$. ולכן $x=1$. מתקיים ש$f''(x)=\frac{2}{x^3}_{x=1}=2>0$ ולכן מינימום.

הוכחנו בעבר שמתקיים $\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)}{2}\ge\sqrt{x\frac{1}{x}}=1$ ולכן תמיד מתקיים $x+\frac{1}{x}=f(x)\ge 2$ ולכן $\min f(x)=2$.

דוגמא 2: נביט בפונקציה $f(x)=xe^{-\alpha x}$, $x\in(0,\infty),\alpha>0$. גם כן ידוע שמתקיים על פי כללי הנגזרות שהוכחנו בהרצאות קודמות $f'(x)=e^{-\alpha x}-\alpha xe^{-\alpha x}=e^{-\alpha x}(1-\alpha x)$ ז"א ש$x=\frac{1}{\alpha}$. נגזור פעם שניה ונראה שהנקודה היא מקסימום.

פונקציות קמורות וקעורות:

הגדרה: $f:(a,b)\to R$ תקרא קמורה אם $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)(x_2)$: $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ לכל λ שמקיים $0<\lambda<1$.

הגדרה: $f:(a,b)\to R$ תקרא קמורה ממש אם $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)(x_2)$: $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ לכל λ שמקיים $0<\lambda<1$.

הגדרה: $f:(a,b)\to R$ תקרא קעורה אם $\forall \mathrm{x}_1,x_2\in(a,b):f(\lambda x_1+(1-\lambda)\mathrm{x}_2)\geq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)(x_2)$ לכל λ שמקיים $0<\lambda<1$.

הגדרה: $f:(a,b)\to R$ תקרא קעורה אם $\forall \mathrm{x}_1,x_2\in(a,b):f(\lambda x_1+(1-\lambda)\mathrm{x}_2)>\lambda f(x_1)+(1-\lambda)(x_2)$ לכל λ שמקיים $0<\lambda<1$.

כל ההגדרות הם בהנחה ש $x_1\neq x_2$.

כעת אנחנו נחפש קשר בין התכונות הללו, לבין נגזרות.

<u>משפט</u>: נניח שהפוקנציה שלנו $f\in D(a,b)$. מתקיים כי

1. f קמורה או״א f' מונוטונית עולה.
2. f קעורה או״א f' מונוטונית יורדת.
3. f קמורה ממש או״א f' מונוטונית עולה ממש.
4. f קעורה ממש או״א f' מונוטונית יורדת ממש.

הוכחה: נוכיח רק את 1, כל ההוכחות דומות מאוד.

$\Longleftarrow$ נניח שf קמורה, ואנחנו רוצים להוכיח שf' מונוטונית עולה. נבחר , בלי הגבלת הכלליות, שתי נקודות שנסמנם ב$x_1<x_2$ כאשר $x_1,x_2\in(a,b)$. היא קמורה, לכן ע״פ הגדרה $f(\lambda x_1+(1-\lambda)\mathrm{x}_2)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)(x_2)$. נעביר אגפים ונכלל כדי לקבל $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(1-\lambda)\left(f(x_2)-f(x_1)\right)}{(1-\lambda)(x_2-x_1)}=\frac{\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-f(x_1)}{(1-\lambda)(x_2-x_1)}\leq\frac{f(\lambda x_1+(1-\lambda)\mathrm{x}_2)}{\lambda f(x_1)+(1-\lambda)(x_2)}\ (*)$ ולכן מתקיים עבור $\lambda\to1$ ש$\lambda x_1+(1-\lambda)\mathrm{x}_2\to x_1$. ומתקיים $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq f'(x_1)=\lim_{\lambda\to1}(*)$.

כמו כן $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\lambda\left(f(x_1)-f(x_2)\right)}{\lambda(x_1-x_2)}=\frac{\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-f(x_2)}{\lambda(x_1-x_2)}\geq\frac{f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-f(x_2)}{\lambda\underbrace{(x_1-x_2)}_{<0}}=\frac{f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-f(x_2)}{(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-x_2}\ (**)$

ועבור $\lambda\to0$ מתקיים $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\to x_2$ ולכן $f'(x_2)\ \to_{\lambda\to0}(**)$ ומכאן ,נשתמש בכל הפיתוחים, שמתקיים עבור הנגזרת $f'(x_2)\geq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq f'(x_1),(x_1<x_2)$ וזה אומר שהנגזרת עולה מונוטונית. כיוון אחד הוכחנו.

$\Longrightarrow$ נניח שהנגזרת עולה מונוטונית. נגדיר עבור $x_1<x_2$ את $c:=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$. ז״א שקיים $\xi_1\in(x_1,c)$ כך שמתקיים עבורו $f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1}$ וגם קיים $\xi_2\in(c,x_2)$ כך ש$f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}$. (משפט לגרנגי). מכיוון ש$\xi_1<c<\xi_2$ מתקיים ש$f'(\xi_1)\leq f'(\xi_2)$ לכן $\frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}\geq\frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1}$ נכפיל (הכל חיובי במכנה) , נעביר אגפים, ונצמצם בהתאם לדרוש כדי לקבל $(x_2-x_1)f(c)\leq(c-x_1)f(x_2)+(x_2-c)f(x_1)$. נעביר הכל לצורה שלנו: $f(c)\leq\frac{c-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)+\frac{c-x_2}{x_2-x_1}f(x_1)$

ואנחנו יכולים להציב את c בהתאם למה שהגדרנו, כדי לקבל בדיוק את הדרוש. מ.ש.ל. ■.

הערה: עבור נגזרת שעולה מונוטונית ממש מתקיים ש$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$ אז האי שיוויון הוא ממש, ואז ההוכחה פשוטה.

<u>משפט</u>: $f\in D^2(a,b)$. אז:

1. f קמורה (כולל ממש) או״א $\forall \mathrm{x}\in(\mathrm{a},\mathrm{b}):f''(x)\geq0$.
2. אם $\forall \mathrm{x}\in(\mathrm{a},\mathrm{b}):f''(x)>0$ אזי f קמורה ממש.

3. f קעורה (כולל ממש) או"א $\forall \mathrm{x} \in (\mathrm{a},\mathrm{b}): f''(x) \le 0$.
4. אם $\forall \mathrm{x} \in (\mathrm{a},\mathrm{b}): f''(x) < 0$ אזי f קעורה ממש.

הגדרה: נאמר ש x_0 נקודת פיתול אם הפונקציה עוברת מקעירות לקמירות או להיפך.

<u>משפט</u>: אם x_0 נקודת פיתול וקיימת נגזרת שנייה, $f''(x_0)$ אזי $f''(x_0) = 0$. נובע ישירות מההוכחות.

הכללה כתרגיל בית: הוכח כי f קמורה ב*(a,b)* או"א $\forall x_1, \dots, x_n \in (a,b)\ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n = 1$ מתקיים $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$. זה נקרא אי שיוויון של ינסן (*Jensen*)

דוגמא: $f(x) = e^x$, וגם $f''(x) = e^x$ ולכן היא קמורה. עבור פונקציה קעורה האי שיוויון יהיה עם סימן הפוך. נביט בתור דוגמא $f(x) = \ln x$. נוכיח כי $\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \ge \lambda_1 \ln x_1 + \cdots \lambda_2 \ln x_2$ אבל זה ברור, נכתוב את האי שיוויון קצת אחרת $e^{\ln\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_i x_i\right)} \ge e^{\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \ln x_i} = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i \ln x_i}$ וידוע ש $\sum_{j=1}^{n} \lambda_i x_i \ge x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$.

אי שיווינים חשובים אחרים: $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$.