שאלות הוכחה לינארית 2

1. הוכיחו: $\ker(A^*A)=\ker(A)$

הוכחה: ⊇: יהי v כך ש- $Av=0$ אז $A^*Av=A^*0=0$

⊆: משפט עזר ש- $\langle 0,v\rangle=0$ לכל v.

$$\langle 0,v\rangle=\langle 0+0,v\rangle=\langle 0,v\rangle+\langle 0,v\rangle$$

$$\langle 0,v\rangle=0$$

כעת, יהי v כך ש- $A^*Av=0$

$$0=\langle A^*Av,v\rangle=\langle Av,Av\rangle \Rightarrow Av=0$$

2. א. הוכיחו: $(\operatorname{Im}T)^{\perp}=\ker(T^*)$ כש- $T:V\to W$

ב. הוכיחו: $\dim(\ker T)-\dim(\ker T^*)=\dim V-\dim W$

פתרון: א. ⊇: יהי v כך ש- $T^*v=0$

יהי $T(u)$ וקטור מהצורה $T(u)$

$$\langle v,T(u)\rangle=\langle T^*v,u\rangle=\langle 0,u\rangle=0$$

לכן $v\in(\operatorname{Im}T)^{\perp}$

⊆: יהי $v\in(\operatorname{Im}T)^{\perp}$

אז לכל $T(u)$ $\langle v,T(u)\rangle=0$

ניקח $u=T^*v$

$$0=\langle v,TT^*v\rangle=\langle T^*v,T^*v\rangle \Rightarrow T^*v=0$$

$v\in\ker T^*$

ב. $\dim\ker T=\dim V-\dim\operatorname{Im}T$

$$\dim\operatorname{Im}T=\dim W-\dim(\operatorname{Im}T)^{\perp}$$

אבל $\operatorname{Im}T^{\perp}=\ker T^*$

לכן $\dim\ker T=\dim V-(\dim W-\dim\ker(T^*))$

$$\dim\ker T-\dim\ker T^*=\dim V-\dim W$$

3. הוכח/הפרך: אם T אוניטרי וצמוד לעצמו אז $T=T^3$

הוכחה: $T=T^*$ וגם $T^*=T^{-1}$ לכן $T^{-1}=T$

$$T^3=T\cdot T^{-1}\cdot T=T\cdot T^{-1}\cdot T=T$$

4. הוכיחו: אם $V_1\cap V_2=0$ וגם $V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}=0$

אז $V_1^{\perp}\oplus V_2^{\perp}=V$

<u>פתרון:</u> ראשית, נשים לב ש- $0=V_1^\perp \cap V_2^\perp$ ולכן הסכום ישר

צריך להוכיח: $V = V_1^\perp + V_2^\perp$

$$V = 0^\perp = (V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$$

מש"ל

5. יהיו v,w שני וקטורים כך ש- $\|w\|=\|v\|$.

הוכח שקיימת T אוניטרית כך ש- $Tv=w$

<u>הוכחה:</u> אם $0=w=v$, נקח $T=I$.

אחרת, $0\neq w,v \Rightarrow 0\neq\|w\|,\|v\|$. נשים לב $\frac{v}{\|v\|}$ הוא מנורמל ב-

$B = \frac{v}{\|v\|}, b_2, \ldots, b_n$

ניתן להשלים אותו לבסיס אורתונורמלי וגם את $\frac{w}{\|w\|}$ נשלים לבסיס אורתונורמלי

$C = \frac{w}{\|w\|}, c_2, \ldots, c_n$

לפי משפט ההגדרה, קיימת T כך ש $T(b_i)=c_i$. T מעבירה בסיס א"נ

לבסיס א"נ ולכן היא אוניטרית א"ל.

כמו כן: $T(v) = T\left(\|v\|\frac{v}{\|v\|}\right) = \|v\|\, T\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \|v\| \cdot \frac{w}{\|w\|} =$

$\|w\| \cdot \frac{w}{\|w\|} = w.$

6. $V=\mathbb{R}_3[x]$ עם המ"פ: $\langle f,g\rangle = \int_0^1 fg\,dx$

מצאו $U^\perp$ עבור $U=\{p(1)=0\}$

<u>פתרון</u> (נמצא בסיס ל-U):

ax^2+bx+c כך שאם $x=1$ מקבל 0

$a+b+c=0$

$(-b-c, b, c) = span(-1,1,0),(-1,0,1) =$

$span(x^2-x),(x^2-1)$

צריך ax^2+bx+c כך:

I $\int_0^1 (x^2-1)(ax^2+bx+c) = 0$

II $\int_0^1 (x^2-x)(ax^2+bx+c) = 0$

I $\int_0^1 ax^4+bx^3+(c-a)x^2-bx-c = 0$

$\frac{ax^5}{5}+\frac{bx^4}{4}+\frac{(c-a)x^3}{3}-\frac{bx^2}{2}-c\Big]_0^1=0$

$\frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3}-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-c=0$

II $\int_0^1 ax^4+(b-a)x^3+(c-b)x^2-cx=0$

$$\frac{ax^5}{5} + \frac{(b-a)x^4}{4} + \frac{(c-b)x^3}{3} - \frac{cx^2}{2}\Big]_0^1 = 0$$

$$\frac{a}{5} + \frac{b-a}{4} + \frac{c-b}{3} - \frac{c}{2} = 0$$

נציב $c=t$

$$\frac{a}{5} + \frac{b}{4} - \frac{a}{4} + \frac{t}{3} - \frac{b}{3} - \frac{t}{2} = 0$$

$$\frac{a}{20} = \frac{-b}{12} - \frac{t}{6}$$

$$a = \frac{-5b}{3} - \frac{10t}{3}$$

נציב במשוואה הראשונה:

$$\frac{\frac{-5b}{3} - \frac{10t}{3}}{5} + \frac{b}{4} + \frac{t}{3} - \frac{\frac{-5b}{3} - \frac{10t}{3}}{3} - \frac{b}{2} + t = 0$$

$$\frac{-b}{3} - \frac{2t}{3} + \frac{b}{4} + \frac{t}{3} - \frac{5b}{9} - \frac{10t}{9} - \frac{b}{2} + \frac{t}{=} 0$$

$$\frac{-41b}{36} - \frac{22t}{9} = 0$$

$$\frac{-41b}{4} - 22t = 0$$

$$b = \frac{-88t}{41}$$

$$a = \frac{-5 \cdot 88t}{41 \cdot 3} - \frac{10t}{3}$$

$$W^\perp = \mathrm{Span}\left\{\left(\frac{-588}{41 \cdot 3} - \frac{10}{3}\right)x^2 - \frac{88}{41}x + 1\right\}$$

7: יהי $E \subseteq V$ תת מרחב. הוכיחו שאם

$$T(E) \subseteq E \quad \text{אז} \quad T^*(E^\perp) \subseteq E^\perp$$

הוכחה

$$\langle T^* e^\perp, e \rangle = \langle e^\perp, Te \rangle = 0$$

($e^\perp \in E^\perp$, $Te \in E$)

קבוצה של מ"ע של T אורתונורמלית: הוכח T … $\{v_i\}$ תמיד span אורתוגונלי,

$$T\left(\sum \alpha_i v_i\right) = \sum \alpha_i \lambda_i v_i \in \mathrm{Span}\{v_i\}$$