פתרון התרגיל הראשון

שאלה 1.3

ב. על פי חוק החילוף נקבל $a+c=c+a=c+b=b+c$ והגענו לסעיף א'. באותו אופן לגבי כפל.

ה. $a=a\cdot 1=a((a^{-1})(a^{-1})^{-1})=(aa^{-1})(a^{-1})^{-1}=(a^{-1})^{-1}$

(בדוק מדוע השוויון האחרון נכון).

שאלה 2.3

ב. באותו האופן בו הוכחנו בכיתה כי $\mathbb{N}$ אינו שדה.

ד. לא כי $1_F+0_F\neq 1_F$

שאלה 3.1

א. נוכיח רק את קיום ההופכי ביחס לכפל (יש להוכיח את כל שאר התכונות, אך הן ממש טכניות).

אם $(a,b)\neq(0,0)$ אזי $(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. איך מוצאים את ההפכי? פשוט רושמים $(a,b)\cdot(c,d)=1_{\mathbb{C}}=(1,0)$ ומקבלים 2 משוואות ב-2 נעלמים (הנעלמים הם c,d שאמורים להיות מבוטאים באמצעות a,b). אם נשתמש בהגדרת הכפל ונפתור את המשוואות נקבל $(c,d)=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

ב. היות ומתקיים $(a,1)\cdot(1,a)=(0,0)$ (בדוק!) - קיבלנו מחלקי אפס, לכן אין זה שדה.

שאלה 3.6

א. פתרו את המשוואה $z^4=-16i$. תחילה נעביר את $-16i$ להצגתו הפולרית: $-16i=16cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. נסמן $z=rcis(\theta)$. נשווה את שני האגפים ונקבל: $r^4cis(4\theta)=16cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ולכן הפתרונות הם (לפי נוסחת השורשים):

$$\left\{2cis\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{4}\right),\ k=0,1,2,3\right\}$$

ב. פתרו את המשוואה $2z^2-8z=10-20i+12zi$. נעביר אגפים ונקבל את המשוואה הריבועית: $2z^2-z(8+12i)+(20i-10)=0$. נפתור לפי הנוסחא לפתרון משוואה

ריבועית ונקבל: $z_{1,2}=\frac{(8+12i)\pm\sqrt{32i}}{4}=2+3i\pm\sqrt{2i}$. נשים לב שמתקיים $(1+i)^2=2i$ ולכן: $z_1=1+2i,\ z_2=3+4i$.

שאלה 3.7

יהי $z=n+mi$, כאשר $n,m\in\mathbb{Z}$. נעלה אותו בחזקה שלישית ונשווה עם הנתון: $(n+mi)^3=n^3-3nm^2+i(3n^2m-m^3)=2+11i$. מהשוואת החלקים הממשי והמדומה מקבלים מערכת משוואות: $\begin{cases}n^3-3nm^2=2\\3n^2m-m^3=11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n(n^2-3m^2)=2\\m(3n^2-m^2)=11\end{cases}$. אם נתבונן במשוואה הראשונה, נוכל לשים לב כי n חייב להיות אחד מהמספרים הבאים: $\pm1,\pm2$. באופן דומה m חייב להיות אחד מהמספרים הבאים: $\pm1,\pm11$ אבל הפתרון היחידי המקיים את שתי המשוואות יחד הוא: $n=2,\ m=1$. (מציבים $n=2$ ומקבלים ש $m=1$ וכשמציבים $n=\pm1,-2$ רואים שאין פתרון שלם מתאים ל m).

שאלה 3.11

א. נפתור את המשוואה $z^n=1$. מתקיים $(cis(\theta))^n=cis(n\theta)=1$ ז"א $n\theta=2\pi k$ עבור $0\le k<n$ ולכן הפתרונות הם $z_k=cis(\frac{2\pi k}{n})$ עבור $0\le k<n$. z_1 מקיים את הדרוש (מדוע?).

ב. שימו לב: $z_1\neq1$ ולכן קיבלנו סידרה הנדסית $1\neq q=z_1$. נשתמש בנוסחה עבור סידרה הנדסית ונקבל: $\sum_{k=0}^{n-1}z_k=\frac{z_1{}^n-1}{z_1-1}=0$.

שאלה 4.6

א. יש רמז באתר.

ב. באינדוקציה. עבור $a=0$ ברור ש $a^p=a$.
נניח שהטענה נכונה עבור $a=n$ ונוכיח עבור $a=n+1$.
נשים לב שאם $a=p-1$ סיימנו. אם $a\neq p-1$ נקבל ש $n+1<p$ ו- $(n+1)^p=n^p+1^p=n+1$.

ג. $F\subseteq\mathbb{Z}_p$ הוכחנו בכיתה (תרגיל 4.5 סעיף ב'). לפולינום $x^p-x=0$ יכולים להיות לכל היותר p פתרונות. אם קיים $a\in F$ שלא נמצא ב- $\mathbb{Z}_p$ נקבל לפחות $p+1$ פתרונות לפולינום. כל האיברים ב $\mathbb{Z}_p$ ובנוסף a וכבר קיבלנו $p+1$ פתרונות.

שאלה 1.5

מדרגים לצורה משולשת עליונה ומוצאים את הפתרון: $\begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ 2\frac{i+1}{i-1} \end{pmatrix}$.

שאלה 1.6

(נישאר עם המשוואות, מבלי לעבור למטריצה):

$\begin{cases} 2x+4y+6z=8 \\ 3x+6y+10z=4 \\ 4x+8y+2z=9 \end{cases}$ אם נצמצם את המשוואה הראשונה ב-2 (למה זה מותר?) נקבל

$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 3x+6y+10z=4 \\ 4x+8y+2z=9 \end{cases}$. נבצע את הפעולות הבאות : $\begin{matrix} R_2-3R_1\to R_2 \\ R_3-4R_1\to R_3 \end{matrix}$ ונקבל את המערכת

$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 0x+0y+z=-8 \\ 0x+0y+-10z=-7 \end{cases}$ קל לראות שלמערכת אין פתרון מעל $\mathbb{Z}$.

(אגב, למערכת גם אין פתרון מעל הממשיים).

שאלה 1.7

למערכת $x+y+z=0$ מעל $\mathbb{Z}_7$ יש בדיוק 49 פתרונות שונים.

(מדוע?)

שאלה 1.8

- נפתור באופן מלא רק את סעיף ג':

$$\begin{cases} x_1+(a-1)x_2-x_3=4 \\ ax_1+(a-1)x_2-x_3=a+3 \\ x_1+(a-1)x_2+(a-3)x_3=7 \end{cases} \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-aR_1\to R_2} \begin{cases} x_1+(a-1)x_2-x_3=4 \\ 0x_1+(1-a)(a-1)x_2+(a-1)x_3=-3(a-1) \\ 0x_1+0x_2+(a-2)x_3=3 \end{cases}$$

פתרון יחיד: $a \neq 1,2$.

אין פתרון: כש $a=2$ נקבל מהמשוואה השלישית סתירה ($x_1+0x_2+0x_3=3$) ולכן במצב זה אין פתרון.

אינסוף פתרונות: $a=1$ נקבל מערכת $\begin{cases} x_1+0x_2-x_3=4 \\ 0x_1+0x_2+0x_3=0 \\ 0x_1+0x_2+-x_3=3 \end{cases}$ או אם נחליף את השורות השנייה והשלישית לקבלת צורה מדורגת $\begin{cases} x_1+0x_2-x_3=4 \\ 0x_1+0x_2+-x_3=3 \\ 0x_1+0x_2+0x_3=0 \end{cases}$ וברור שישנם אינסוף פתרונות. המשתנה החופשי הוא x_2 כי x_1 ו- x_3 משתנים מובילים (בצורה המדורגת הם המשתנים הראשונים בשורות הראשונה והשנייה כך שהמקדמים שלהם אינם אפסים) אם נציב $x_2=t$ נקבל שאוסף הפתרונות הוא מהצורה $\{(1,t,-3) \mid t \in R\}$.

- תשובה סופית לסעיף א': עבור $a=0 \vee a=1 \vee a=-1$ אין פתרון; עבור $a \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq -1$ יש פתרון יחיד.
- תשובה סופית לסעיף ב': עבור $a=1$ אין פתרון; עבור $a=-1$ יש אינסוף פתרונות; עבור $a \neq 1 \wedge a \neq -1$ יש פתרון יחיד.