אנליזה מודרנית
פתרון תרגיל 6

תרגיל 1 יהי $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ממ"ח, $f : X \to [0, \infty]$ מדידה ואי־שלילית, ומקיימת $\int_X f d\mu = c$ כאשר $0 < c < \infty$. יהי $\alpha > 0$ קבוע.

הוכיחו כי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left[1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right] d\mu = \begin{cases} \infty & 0 < \alpha < 1 \\ c & \alpha = 1 \\ 0 & 1 < \alpha < \infty \end{cases}$$

(**רמז:** אם $\alpha \geq 1$, האינטגרנדים נשלטים ע"י αf, ואם $\alpha < 1$ ניתן להפעיל את לפת פאטו.

הוכחה. נוכיח ראשית עבור $\alpha \geq 1$. נשים לב כי $n \log\left[1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right]$ היא חיובית תמיד לכל n ו־x. כעת, נוכיח ש־

$$n \log\left[1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right] \leq \alpha f$$

ולכן, מספיק להוכיח:

$$\log\left[1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right] \leq \frac{\alpha f}{n} \implies 1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha \leq e^{\frac{\alpha f}{n}}$$

כעת, נסמן $y = \frac{f}{n}$. בגלל ש־f ו־n אי־שליליות, נקבל ש־$y \in [0, \infty]$. כאשר $y = \infty$ מקבלים אפילו את הטענה המקורית בטריוויאליות. אחרת, נרצה להוכיח שעבור $y \in [0, \infty)$ מתקיים:

$$1 + y^\alpha \leq e^{\alpha y}$$

נוכיח זאת בשני שלבים - נוכיח ש־$F = e^{\alpha y} - 1 - y^\alpha$ היא עולה ו־$F(0) = 0$. זה יגרור שתמיד $F \geq 0$ ולכן נקבל את האי־שיוויון הדרוש. מתקיים:

$$F(0) = e^0 - 1 - 0 = 1 - 1 = 0$$

ולכן נותר להוכיח ש־F עולה. לשם כך, נגזור ונראה שהנגזרת חיובית לכל $y \geq 0$.

$$\frac{d}{dy} F = \alpha e^{\alpha y} - \alpha y^{\alpha - 1}$$

ולכן נותר שנוכיח ש־$e^{\alpha y} \geq y^{\alpha-1}$ לכל $y \geq 0$ כדי ש־$\frac{d}{dy} F \geq 0$. ידוע לנו כי לכל $y \in [0, \infty)$ מתקיים $e^y \geq y$. אם $y \geq 1$ אז:

$$e^{\alpha y} = (e^y)^\alpha \geq y^\alpha \geq y^{\alpha-1}$$

כאשר אי־השיוויון חוקי כי גם $\alpha \geq 1$ ולכן החזקה שומרת על אי־השיוויון ו־$y \geq 1$ ולכן $y^\alpha \geq y^{\alpha-1}$. אם לעומת זאת $0 \leq y \leq 1$ אז בהכרח $0 \leq y^{\alpha-1} \leq 1$, ו־$e^{\alpha y} \geq 1$ כי $\alpha y \geq 0$, ולכן עדיין מתקיים $e^{\alpha y} \geq y^{\alpha-1}$, ולכן לכל $y \geq 0$ מתקיים ש־$\frac{d}{dy} F \geq 0$.

סה"כ, הראנו שהנגזרת חיובית, F עולה ומכאן שלכל $y \in [0, \infty)$ מתקיים כי

$$e^{\alpha y} \geq 1 + y^\alpha$$

ונציב חזרה ונפשט מחדש לקבל את מה שרצינו:

$$n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]\le \alpha f$$

וזה נכון לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in X$[1]. ולכן αf שולטת לכל n על האינטגרנד. מכיוון ש־$\int_X f d\mu = c$ אזי f אינטגרבילית ולכן $\int_X \alpha f = \alpha c$ ולכן גם αf אינטגרבילית. לפי משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]d\mu=\int_X \lim_{n\to\infty} n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]d\mu$$

כעת, נשים לב ש־

$$n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]=\frac{n^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]=\frac{\log\left[\left(1+\frac{f^{\alpha}}{n^{\alpha}}\right)^{n^{\alpha}}\right]}{n^{\alpha-1}}\le\frac{\log\left(e^{f^{\alpha}}\right)}{n^{\alpha-1}}=\frac{f^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}$$

כאשר אי־השיוויון נובע מכך שהסדרה בתוך ה־log ידועה כמתכנסת בעליה לפונקציית האקספוננט. כעת, כאשר $\alpha>1$, $\frac{f^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}\to 0$ כאשר $n\to\infty$. ממשפט הסנדוויץ' נובע ש־$n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]\xrightarrow{n\to\infty}0$, ולכן סה"כ

$$\int_X \lim_{n\to\infty} n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]d\mu=\int_X 0 d\mu = 0$$

ולכן הוכחנו את הדרוש אם $\alpha>1$. אם $\alpha=1$, אז

$$\int_X \lim_{n\to\infty} n\log\left[1+\frac{f}{n}\right]d\mu=\int_X \lim_{n\to\infty}\log\left[\left(1+\frac{f}{n}\right)^{n}\right]d\mu=\int_X \log\left[e^{f}\right]d\mu=\int_X f d\mu = c$$

כאשר השיווין השני נובע שוב מהגדרת האקספוננט לפי הגבול הנ"ל.

נותר כעת המקרה ש־$\alpha<1$. במקרה זה, נשתמש בלמת פאטו להסיק כי

$$\int_X \lim_{n\to\infty} n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]d\mu\le\liminf\int_X n\log\left[1+\frac{f}{n}\right]d\mu$$

אבל כאשר $0<\alpha<1$, כאשר $n\to\infty$ בכל הנקודות בהן $f\neq 0$,

$$\frac{n^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]=n^{1-\alpha}\cdot\log\left[\left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right)^{n^{\alpha}}\right]\to\infty$$

נתון ש־$\int_X f d\mu = c > 0$, ולכן בהכרח $\mu(\{x : f(x)\neq 0\})>0$, שכן אחרת היינו מקבלים

$$\int_X f d\mu=\int_{\{x:f(x)=0\}} f d\mu+\int_{\{x:f(x)\neq 0\}} f d\mu = 0+0=0\neq c$$

ולכן בהכרח $\mu(\{x : f(x)\neq 0\})>0$. מכאן, ש־

$$\int_X \lim_{n\to\infty} n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]d\mu\ge\int_{\{x:f(x)\neq 0\}} \lim_{n\to\infty} n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]d\mu=\int_{\{x:f(x)\neq 0\}}\infty d\mu=\infty$$

שכן בקבוצה $\{x : f(x)\neq 0\}$ ערך הפונקציה הוא ∞ תמיד. מכאן ש־

$$\infty=\int_X \lim_{n\to\infty} n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]d\mu\le\liminf\int_X n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]d\mu\le\limsup\int_X n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]d\mu=\infty$$

ולכן נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty}\int_X n\log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]d\mu=\infty$$

כאשר $\alpha<1$, **כדרוש**. ■

[1]שכן לא התחשבנו כלל בערך $f(x)$ פרט לכך שהוא אי־שלילי

תרגיל 2 יהי $(X,\mathcal{S},\mu)$ ממ"ח, ותהי $f:X\to[0,\infty]$ מדידה $d\mu$. עבור $E\in\mathcal{S}$ נגדיר $\nu(E)=\int_E fd\mu$. הוכחנו בהרצאה כי ν היא מידה.

1. הוכיחו כי לכל $g:X\to[0,\infty]$ מדידה $d\mu$ מתקיים

$$\int_X gd\nu=\int_X gfd\mu$$

2. באיזה תנאי הפונקציה $g:X\to\mathbb{R}^*$ אינטגרבילית $d\nu$?

הוכחה.

1. ראשית נוכיח את הטענה עבור פונקציות פשוטות. נניח ש־g פונקציה פשוטה. תהי ההצגה הקנונית של g:

$$g=\sum_{k=1}^n a_kI_{E_k}$$

כאשר בגלל שההצגה קנונית, E_k היא חלוקה זרה של X. לפי ההגדרה של אינטגרל לפונקציות פשוטות, מתקיים:

$$\int_X gd\nu=\sum_{k=1}^n a_k\nu(E_k)=\sum_{k=1}^n a_k\int_{E_k}fd\mu=\sum_{k=1}^n\int_{E_k}a_kfd\mu=\sum_{k=1}^n\int_X a_k\cdot I_{E_k}fd\mu=$$

כעת, חשוב לראות ש־$a_k\cdot I_{E_k}=g\cdot I_{E_k}$, שכן אם $x\in E_k$, אז $(g\cdot I_{E_k})=g(x)=a_k$ לפי ההגדרה של החלוקה E_k, ואם $x\notin E_k$ בשתי הפונקציות הערך 0. ולכן,

$$=\sum_{k=1}^n\int_X g\cdot I_{E_k}fd\mu=\sum_{k=1}^n\int_{E_k}g\cdot fd\mu=\int_X gfd\mu$$

שכן E_k חלוקה של X והסכום הנ"ל סופי. ולכן

$$\int_X gd\nu=\int_X gfd\mu$$

עבור g **פשוטה**. כעת, נניח ש־g אי־שלילית. לפי משפט מן ההרצאה, קיימת סדרה $\{\varphi_n\}$ של פונקציות המתכנסת ל־g בעלייה. נשים לב שמכאן $\varphi_n\cdot f$ מתכנסת ל־$g\cdot f$ בעלייה. בגלל ש־$\varphi_n\to g$ בעלייה, נוכל להשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית של לבג להסיק:

$$\int_X gd\nu=\int_X\lim_{n\to\infty}\varphi_nd\nu=\lim_{n\to\infty}\int_X\varphi_nd\nu=\lim_{n\to\infty}\int_X\varphi_n\cdot fd\mu=$$

וכעת, בגלל ש־$\varphi_n\cdot f\to g\cdot f$ בעלייה, נקבל בעזרת משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג כי:

$$=\int_X\left(\lim_{n\to\infty}\varphi_n\cdot f\right)d\mu=\int_X gfd\mu$$

ולכן

$$\int_X gd\nu=\int_X gfd\mu$$

כדרוש.

2. מתקיים עבור $g:X\to\mathbb{R}^*$ כלשהי ש־

$$\int_X gd\nu=\int_X g^+d\nu-\int_X g^-d\nu=\int_X g^+fd\mu-\int_X g^-fd\mu=$$

כעת, בגלל ש־f אי־שלילית, קל לראות ש־$(gf)^+=g^+f$, ו־$(gf)^-=g^-f$, ולכן:

$$\int_X(gf)^+d\mu-\int_X(gf)^-d\mu=\int_X gfd\mu$$

כאשר השיוויון האחרון מוגדר היטב אם שני האינטגרלים מתכנסים, והם מתכנסים $\iff$ gf אינטגרבילית $d\mu$. כלומר, g אינטגרבילית $d\nu$ $\iff$ gf אינטגרבילית $d\nu$.

■

תרגיל 3 יהי $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$ ממ"ח בו μ היא מידת הספירה. פונקציות $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ הן בעצם סדרות של מספרים ממשיים.

1. תהיינה $a,b:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, המוגדרות ע"י $a_n=\frac{(-1)^n}{n}, b_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$. מי מהן מדידה? מי מהן אינטגרבילית? חשבו את האינטגרל של האינטגרבילית מבינהן.
2. תנו אפיון (תנאי הכרחי ומספיק) של הפונקציות המדידות $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.
3. כנ"ל עבור הפונקציות האינטגרביליות.
4. מצאו ביטוי לאינטגרל של פונקציה אינטגרבילית $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.

הוכחה.

1. נוכיח כי שתיהן מדידות. קל לראות כי ב־$(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$ כל קבוצה היא מדידה. מכאן שבהכרח לכל $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\{x\in\mathbb{N}:a_x>\alpha\}\subseteq\mathbb{N}\implies\{x\in\mathbb{N}:a_x>\alpha\}\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$$

וכך גם עבור b_n. מכאן ששתיהן מדידות.
לעומת זאת, נוכיח כי b_n אינטגרבילית בעוד ש־a_n **אינה אינטגרבילית**. מספיק שנראה ש־a_n^+ איננה אינטגרבילית.[2]
מתקיים כי

$$a_n^+=0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{6}\dots$$

כעת, קל לראות כי $\mathbb{N}=\biguplus_{n=1}^\infty\{n\}$, ולכן:

$$\int_{\mathbb{N}}a_n^+d\mu=\sum_{n=1}^\infty\int_{\{n\}}a_n^+d\mu$$

כאשר n אי־זוגי, $a_n^+\equiv0$, ולכן $\int_{\{n\}}a_n^+d\mu=0$. אם n זוגי אז $a_n^+=\frac{1}{2n}$, ואז:

$$\int_{\{n\}}a_n^+d\mu=\int_{\mathbb{N}}a_n^+\cdot I_{\{n\}}d\mu=\frac{1}{n}\cdot\mu(\{n\})+0=\frac{1}{n}$$

שכן הפונקציה $a_n^+\cdot I_{\{n\}}$ פשוטה, כי היא מקבלת את הערכים 0 ו־$\frac{1}{n}$. ומכאן,

$$\int_{\mathbb{N}}a_n^+d\mu=\sum_{n=1}^\infty\int_{E_n}a_n^+d\mu=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2n}=\infty$$

ולכן a_n^+ איננה אינטגרבילית. נוכיח כעת כי b_n היא דווקא כן אינטגרבילית. לשם כך נוכיח ש־b_n^+ ו־b_n^- אינטגרביליות.
עפ"י אותו נימוק שעשינו עבור a_n, ב־$\{n\}$ כאשר n זוגי, $\int_{\{n\}}b_n^+d\mu=\int_{\mathbb{N}}b_n^+\cdot I_{\{n\}}d\mu=\frac{1}{n^2}\cdot\mu(\{n\})+0=\frac{1}{n^2}$

$$\int_{\mathbb{N}}b_n^+d\mu=\sum_{n=1}^\infty\int_{\{n\}}b_n^+d\mu=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{24}<\infty$$

ובאותו האופן בדיוק,

$$\int_{\mathbb{N}}b_n^-d\mu=\sum_{n=1}^\infty\int_{\{n\}}b_n^-d\mu=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}$$

כאשר השיוויון השלישי נובע מכך שהטורים הנ"ל **מתכנסים בהחלט** ולכן ניתן לשנות את סדר הסכימה. מכאן ש־

$$\int_{\mathbb{N}}b_nd\mu=\int_{\mathbb{N}}b_n^+d\mu-\int_{\mathbb{N}}b_n^-d\mu=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}-\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=-\frac{\pi^2}{12}$$

ולכן הוכחנו ש־b_n אינטגרבילית וגם חישבנו את האינטגרל, **כדרוש**.

[2] כלומר, עם אינטגרל אינסוף.

2. כל פונקציה היא מדידה. זה נובע בגלל שכל קבוצה במרחב היא מדידה, שכן הסיגמא־אלגברה היא $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

3. יהי $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ פונקציה. נוכיח כי f אינטגרבילית $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ **מתכנס בהחלט.**

הוכחה. ($\Rightarrow$) נניח ש־$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס בהחלט. קל לראות באופן זהה לדוגמאות שעשינו לעיל, כי

$$\int_{\{n\}} f^{+} d\mu = f^{+}(n)$$

שכן

$$\int_{\{n\}} f^{+} d\mu = \int_{\mathbb{N}} f^{+}\cdot I_{\{n\}} d\mu = f^{+}(n)\cdot \mu(\{n\}) + 0 = f^{+}(n)$$

ובאופן דומה:

$$\int_{\{n\}} f^{-} d\mu = f^{-}(n)$$

ומכאן, בגלל ש־$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס בהחלט, גם $\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)|<\infty$.

$$\int_{\mathbb{N}} f^{+} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{n\}} f^{+} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f^{+}(n) \le \sum_{n=1}^{\infty}|f(n)| < \infty$$

$$\int_{\mathbb{N}} f^{-} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{n\}} f^{-} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f^{-}(n) \le \sum_{n=1}^{\infty}|f(n)| < \infty$$

ומכאן ש־

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \int_{\mathbb{N}} f^{+} d\mu - \int_{\mathbb{N}} f^{-} d\mu$$

מוגדר היטב וסופי, ולכן f אינטגרבילית.

($\Leftarrow$) נניח ש־f אינטגרבילית. נוכיח כי $\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)|$ מתכנס. בגלל ש־f אינטגרבילית, $\int_{\mathbb{N}} f^{+} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f^{+}(n)$ לפי מה שהוכחנו כבר בכיוון הקודם, ו־$\int_{\mathbb{N}} f^{-} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f^{-}(n)$. מכאן, נקבל כי שני הטורים חיוביים ומתכנסים ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} f^{+}(n) + f^{-}(n) < \infty$$

אבל מהגדרת f^{+}, f^{-} מתקיים ש־$|f| = f^{+} + f^{-}$, ולכן סה"כ

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)| < \infty$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט. ■

4. תהי $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית. אזי, מהתנאי ההכרחי ומספיק מהסעיף הקודם, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, וגם ממה שהוכחנו בהוכחה, מתקיים

$$\int_{\mathbb{N}} a d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$$

כעת,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+} - a_n^{-} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$$

כאשר השיוויון השני נובע מכך ש־a_n מתכנס בהחלט ולכן ניתן לשנות את סדר הסכימה כרצוננו. ולכן נקבל כי

$$\int_{\mathbb{N}} a d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

כלומר, אינטגרל של סדרה הוא סכום הסדרה.

■