תרגיל 11

18 בינואר 2013

1. יהי V המרחב הוקטורי $\mathbb{R}^2$, יחד עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

(א) הראה שאם U הוא אופרטור אוניטרי על V, אזי המטריצה המייצגת של U ביחס לבסיס הסטנדרטי $\{e_1, e_2\}$ מקבל אחת משתי הצורות

i. $\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$

ii. $\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{pmatrix}$.

עבור θ ממשי, $0 \le \theta < 2\pi$.

נסמן ב U_θ את האופרטור שמתאים למטריצה מהצורה הראשונה (מטריצת סיבוב). הראה שכל מטריצה אוניטרית על V מתקבלת או שעל ידי סיבוב, עו על ידי הרכבה של שיקוף ביחס לציר x וסיבוב.

(ב) חשב את $U_\theta U_\phi$.

(ג) הוכח $U_\theta^* = U_{-\theta}$.

(ד) יהי ϕ מספר ממש קבוע, נסמו $B = \{b_1, b_2\}$ כאשר $b_i = U_\phi e_i$. עם θ הוא מספר ממשי אחר, מה היא מטריצת סיבוב ביחס לבסיס B?

2. הוכח שלכל מטריצה סימטרית ממשית סימטרית A קיימת מטריצה סימטרית ממשית B כך ש $A = B^3$.

3. הוכח שכל מטריצה נורמלית ונילפוטנטית היא מטריצת האפס.

4. יהי T אופרטור נורמלי על מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי. הוכח, שקיים פולינום f עם מקדמים מרוכבים כך ש $T^* = f(T)$. (הצג אם T כמטריצה אלכסונית ומצא מה חייב להיות f).

5. לכל אחת מהמטריצות הממשיות הסימטריות הבאות A מצא מטריצה P אורתוגונלית T כך ש P^tAP אלכסונית.

(א) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

(ב) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$