תרגול 4

הגדרה

תהי A מטריצה ריבועית. אזי הפולינום המינימלי של A, מסומן $m_A(x)$ הוא הפולינום המתוקן מהדרגה הנמוכה ביותר המקיים

$$m_A(A) = 0$$

הערה: פולינום מתוקן הינו פולינום מהצורה $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, כלומר המקדם של המונום בעל החזקה הגבוהה ביותר הינו אחד.

תכונות

- לכל פולינום f כך ש $f(A) = 0$ מתקיים $m_A(x)|f(x)$. בפרט ממשפט קיילי-המילטון נובע כי הפולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני
- לפולינום האופייני והפולינום המינימלי בדיוק אותם גורמים אי פריקים. בפרט, השורשים של הפולינום המינימלי הם הערכים העצמיים של המטריצה.
    - מסקנה: על מנת לחשב את הפולינום האופייני, נמצא את הפולינום המכיל את הגורמים האי פריקים של הפולינום האופייני, בחזקות הכי נמוכות, המאפס את המטריצה

תרגילים

א

הוכח כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי

הוכחה.

ראשית נשים לב לעובדה הבאה- יהי פולינום f ותהיינה מטריצות דומות A,B אזי גם המטריצות $f(A), f(B)$ דומות.

אכן, נסמן $f(x) = a_nx^n + \dots + a_0$ ונסמן $A = P^{-1}BP$. לכן:

Error!

$$A) = f(P^{-1}BP) = a_n(P^{-1}BP)^n + \dots + a_0I = a_nP^{-1}B^nP + \dots + a_0P^{-1}P = P^{-1}f(B)P$$

מסקנה: נניח A,B מטריצות דומות, אזי לכל פולינום f מתקיים $f(A)=0$ אם"ם $f(B)=0$.

אכן, המטריצה היחידה הדומה למטריצת האפס הינה מטריצת האפס עצמה. כיוון ש$f(A),f(B)$ דומות, המסקנה נובעת.

בסה"כ, כיוון שהפולינומים המאפסים מטריצות דומות הם אותם פולינומים, בפרט המינימלי המתוקן מבינהם הוא אותו אחד.

ב

תהי A ריבועית כך שהפולינום המינמלי שלה הינו

$$m_A(x)=(x-1)^2$$

יהא $f(x)=x^2+4x+3$, הוכח כי המטריצה $f(A)$ הפיכה.

פתרון.

$$f(A)=A^2+4A+3I=(A-I)^2+6A+2I=6A+2I$$

כעת, נוכיח כי $|f(A)|\neq 0$ ולכן המטריצה הפיכה.

נניח בשלילה כי $|f(A)|=0$ לכן $|6A+2I|=0$ ולכן $|A-\frac{-2}{6}I|=0$

אם כן, $\frac{-2}{6}$ הוא ע"ע של המטריצה A, אבל הוא אינו שורש של הפולינום המינמלי הנתון, בסתירה.

ג

תהי A מטריצה אידמפוטנטית, כלומר $A^2=A$

1. מהן האפשרויות לפולינום המינימלי של A ולע"ע של A?
2. הוכח כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים
3. מהן האפשרויות עבור $tr(A)$?

פתרון.

1. השיוויון $A^2 = A$ שקול לכך שהפולינום $f(x) = x^2 - x = x(x-1)$ מאפס את המטריצה A.

כיוון שהפולינום המינימלי מחלק כל פולינום המאפס את המטריצה, האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$f_2 = x$$
$$f_1 = x - 1$$
$$f_3 = x(x-1)$$

בהתאם הע"ע לכן יכולים להיות 0, 1 או שניהם יחד.

2. כיוון שהגורמים האי פריקים של הפולינום האופייני מופיעים בפולינום המינימלי, ומכיוון שהפולינום המינימלי כאן מכיל רק גורמים לינאריים, הפולינום האופייני חייב להתפרק לגורמים לינאריים.

3. כיוון שהפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים, המטריצה ניתנת לשילוש. כיוון שלמטריצות דומות אותו trace, נובע שהtrace של מטריצה ניתנת לשילוש הוא סכום הע"ע כולל חזרות (הרי הם מופיעים על האלכסון של הצורה המשולשית).

ביחד, האפשרויות לtrace הן כל מספר טבעי בין 0 לבין n, כתלות בריבוי האלגברי של הע"ע 1. קל למצוא דוגמאות שכל ערך כזה אכן מתקבל.

ד

מצא את הפולינום המינימלי של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

פתרון.

$$p_A(x) = (x-1)^2(x-2)$$

לכן שתי האפשרויות היחידות לפולינום המינימלי הן:

$$(x-1)(x-2)$$
$$(x-1)^2(x-2)$$

נציב את המטריצה באופציה הראשונה (מדרגה נמוכה יותר) לגלות שאכן פולינום זה מאפס את המטריצה ולכן

$$m_A(x) = (x-1)(x-2)$$

ה

הוכח כי הפולינום המינימלי של מטריצת הבלוקים $A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ הוא המכפלה המשותפת המינימלית של הפולינומים $lcm(m_A(x), m_B(x))$

הוכחה.

ראשית נשים לב כי לכל פולינום f מתקיים:

$f(A \oplus B) = f(A) \oplus f(B)$(זה תרגיל קל בכפל מטריצות בלוקים).

לכן, אם $f(A \oplus B) = 0$ אזי $f(A) = 0$ וגם $f(B) = 0$.

לכן, $m_A(x)|f(x)$ וגם $m_B(x)|f(x)$, כלומר f הוא כפולה משותפת של $m_A(x), m_B(x)$.

בכיוון ההפוך, כל כפולה משותפת של הפולינומים המינימליים תאפס את מטריצת הבלוקים.

ביחד, הפולינומים המאפסים את מטריצת הבלוקים הם בדיוק הכפולות המשותפות של הפולינומים המינימליים, ואנו מחפשים את המינימלי מבין כל הכפולות המשותפות.

הגדרה

מטריצה A נקראת **ניתנת לשילוש** אם קיימת מטריצה משולשית עליונה הדומה לה

משפט

מטריצה ריבועית ניתנת לשילוש אם ורק אם הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים

אלגוריתם לשילוש מטריצה

- ניקח את האיחוד של הבסיסים למרחבים העצמיים E ונשלים אותו לבסיס B

- נשים את וקטורי B בעמודות מטריצה P ונביט במטריצה $Q=P^{-1}AP$
- נסמן $k=|E|$. נסמן בQ_k את המטריצה המתקבלת מ Q על ידי מחיקת k השורות הראשונות וk העמודות הראשונות.
- ניתן לחזור לתחילת התהליך ולשלש את המטריצה Q_kעל ידי המטריצה P_1. כיוון שהמטריצה Q_k קטנה ממש מהמטריצה המקורית, לתהליך הרקורסיבי הזה יהיה סוף (מטריצה 1 על 1 היא כבר משולשית).
- נסמן $P'_1=I_k\oplus P_1$, כאשר I_kהינה מטריצה היחידה מגודל k.
- סה"כ $P_1'^{-1}P^{-1}APP'_1$הינה מטריצה משולשית

דוגמאות

נשלש את המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -3 & -4 & -5\\ 1 & 1 & -1 & -3\\ 2 & 5 & 9 & 12\\ -1 & -2 & -3 & -3\end{pmatrix}$$

ראשית נמצא את הפולינום האופייני:

$$p_A(x)=(x-1)^2(x-2)^2$$

הוא מתפרק לגורמים לינאריים, לכן המטריצה ניתנת לשילוש. הע"ע הינם 1,2.

לאחר חישוב בסיסים למרחבים העצמיים אנו מקבלים:

$$V_1=span\{(1,-2,1,0)\}$$
$$V_2=span\{(1,0,-2,1)\}$$

נסמן $E=\{(1,-2,1,0),(1,0,-2,1)\}$

ונשלים אותו לבסיס

$$B = \{(1,-2,1,0),(1,0,-2,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

נסמן

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וכעת נקבל

$$Q = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 2 & -4.5 & -6.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & 3.5 \end{pmatrix}$$

נסמן $Q_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & -2.5 \\ 1.5 & 3.5 \end{pmatrix}$

במקרה זה קיבלנו מטריצה לכסינה ועבור

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -0.6 \end{pmatrix}$$

נקבל

$$P_1^{-1}Q_2P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לבסוף נסמן

$$P_1' = I_2 \oplus P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -0.6 \end{pmatrix}$$

ונקבל כפי שרצינו:

$$P_1'^{-1}P^{-1}APP_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -0.4 \\ 0 & 2 & 2 & -0.6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$