תרגיל 7

1. תהא $A \subsetneq \mathbb{R}$ קבוצה צפופה ב $\mathbb{R}$. הוכיחו כי A לא קשירה.

2. יהי (X,τ) מ״ט. הוכיחו ש (X,τ) טריויאלי אמ״ם לכל $\emptyset \neq A \subseteq X$, A צפופה ב X.

3. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. עבור קבוצה $A \subseteq X$ נגדיר את הפונקציה $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ שנקראת הפונקציה האופיינית של A לפי

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

הוכיחו כי X קשירה אם ורק אם לכל $A \subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) הפונקציה χ_A אינה רציפה.

4. האם המרחבים הבאים קשירים?
   (א) $(\mathbb{R} \cup \{p\}, \tau)$ כאשר $\tau = P(\mathbb{R}) \cup \{O \subseteq \mathbb{R} \cup \{p\} : |O^c| < \aleph_0\}$.
   (ב) $(\mathbb{N}, \tau)$ כאשר $\forall n \{\emptyset, \mathbb{N}, O_n\} = \tau$, $O_n = \{0, ..., n\}$.
   (ג) $\mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה המושרית מהמטריקה הp- אדית.

5. יהו $A, B \subseteq X$ קבוצות כך ש $A \cap B$ ו $A \cup B$ קשירים. הוכיחו שA, B קשירות.

6. מהם רכיבי הקשירות ב$\mathbb{Q}$ עם הטופולוגיה האוקלידית?

7. (א) הוכיחו כי מרחב טופלוגי X הוא טריויאלי אם ורק אם יש לו בסיס בעל קבוצה אחת.
   (ב) יהי X מרחב דיסקרטי, הוכיחו כי קבוצה של קבוצות פתוחות (שזו בעצם סתם קבוצה של קבוצות) היא בסיס אם ורק אם היא מכילה את כל היחידונים (הקבוצות בגודל 1)

8. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי B_2, הוכיחו כי $|\tau| \leq \aleph = 2^{\aleph_0}$.

9. תהי X קבוצה לא בת מניה עם טופולוגיה קו-מנייתית (cocountable).כלומרת הקבוצות הפתוחות הן קבוצה ריקה, וקבוצות שהמשלים שלהן הוא בן מניה. האם מרחב זה הוא B_2?

10. (א) יהי X מרחב B_2. הראו כי לכל כיסוי כלשהוא של קבוצות פתוחות יש תת כיסוי בן מניה. (תכונה זאת נקראת תכונת לינדולף).כלומר, אם יש אוסף $\mathcal{U}$ של קבוצות פתוחות כך ש$X = \bigcup_{U_i \in \mathcal{U}} U_i$, אז יש תת קבוצה בת מניה $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ כך ש$X = \bigcup_{U_i \in \mathcal{O}} U_i$.

(ב) יהי X מרחב B_2. הראו שלכל בסיס $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ יש תת קבוצה בת מניה שהיא גם בסיס.