תזכורת: R חוג. R-מודול (משמאל) הוא חבורה אבלית M עם כפל סקלרי $R\times M \to M$
$(r,m)\mapsto rm$

כך ש:

1) $(r+s)m=rm+sm$

2) $r(m+n)=rm+rn$

3) $r(sm)=(rs)m$

4) $1\cdot m=m$

הגדרה: יהי M R-מודול. תת-מודול הוא תת חבורה $N\subseteq M$ שסגורה לכפל סקלרי:

$rn\in N$ לכל $r\in R$, $n\in N$

טענה:

יהי M R-מודול. אזי:

1) $0_R m = 0_M$ לכל $m\in M$

איבר היחידה של M

הוכחה:

$$0_R m=(0_R+0_R)m=0_R m+0_R m \Rightarrow 0_M=0_R m$$

2) לכל $m\in M$, $(-1_R)m=-m$.

הוכחה:

נשים לב כי $1_R\cdot m=m$

$$0_M=0_R\cdot m=(1_R+(-1_R))m=1_R m+(-1_R)m=m+(-1_R)m \Rightarrow (-1_R)m=-m$$

דוגמאות:

1) M R-מודול כלשהו. אזי $M,(0_M)$ הם תת מודולים

הוכחה: צריך להוכיח שלכל $r\in R$ $r\cdot 0_M=0_M$

$$r\cdot 0_M=r(0_M+0_M)=r\cdot 0_M+r\cdot 0_M \Rightarrow 0_M=r0_M$$

2) R חוג, $R=M$ (עם חיבור) הכפל בסקלרי הינו הכפל של R. אז ניתן לראות את R כמודול מעל עצמו. תת המודולים הם האידאלים השמאליים.

3) כמו בפעם הקודמת שלכל חבורה אבלית M יש מבנה יחיד של $\mathbb{Z}$-מודול

$$nm = \underbrace{m + \dots + m}_{n \text{ פעמים}} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

תת-$\mathbb{Z}$-מודול $\Leftrightarrow$ תת חבורה

4) F שדה. מהו $F[x]$-מודול?

נראה ש $F[x]$-מודול $\Leftrightarrow$ מרחב וקטורי V מעל F וגם אנדומורפיזם $\varphi: V \to V$.

בהנתן φ.

$$(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) \cdot v = a_n \varphi^n(v) + \dots + a_1 \varphi(v) + a_0 v$$

זה אכן $F[x]$-מודול. מאידך, בהינתן $F[x]$-מודול M, יהי $V=M$ עם כפל סקלרי ב-F.

$$\varphi: V \to V$$
$$\varphi(v) = x \cdot v$$

5) יהי R חוג, X קבוצה. מודול חופשי

$M = R^X = \{f: X \to R : f(x) \neq 0_R$ רק מספר סופי של $x \in X$ כך ש $\} =$

$$= \{r_1 x_1 + \dots + r_n x_n \mid x_1, \dots, x_n \in X\}$$

אם X סופית, $|X| = n$, אזי $R^X \simeq R^n$

$$x_1 (1_R, 0_R, \dots, 0_R)$$

$$x_2 (0_R, 1_R, 0_R, \dots, 0_R)$$

$$(r_1, \dots, r_n) = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_n x_n$$

6) יהיו $R \subset S$ חוגים. יש ל-S (עם חיבור) מבנה טבעי של R-מודול:

הכפל בסקלרי rs (כפל של S, $s \in S$, $r \in R$)

7) בהינתן הומו' של חוגים $f:R\to S$, עדיין יש ל-S מבנה טבעי של R-מודול

$$\underbrace{r\cdot s}_{\text{כפל סקלרי}} = \underbrace{f(r)\cdot s}_{\text{כפל ב-}S}$$

8) יהי M R-מודול. המאפס של M הוא

$$Ann(M)=\{r\in R : rm=0_M \quad \forall m\in M\} \qquad (\text{annihilator})$$

בודקים כי $Ann(M)\trianglelefteq R$

המודול M נקרא נאמן אם $Ann(M)=(0)$

M נאמן $\Leftarrow$ אם $r,s\in R$ כך ש $rm=sm$ לכל $m\in M$ $\Leftarrow$ $r=s$

9) יהי M R-מודול

$$Tor(M)=\{m\in M : \text{קיים } 0\neq r\in R \text{ כך ש } rm=0_M\}$$

אם R תחום שלמות, זה תת-מודול של M. יהיו $m,n\in Tor(M)$. יהיו $0\neq r,s\in R$ כך ש $rm=sn=0_M$. אז:

$$\underbrace{0\neq rs}_{\text{כי } R \text{ תחום שלמות}}(m+n)=(rs)m+(rs)n=(sr)m+(rsn)=s(rm)+r(sn)=0_M+0_M=0_M \Rightarrow m+n\in Tor(M)$$

אם $m\in Tor(M)$, $0\neq s\in R$ כך ש $sm=0$. לכל $r\in R$, $s(rm)\underset{\text{חילופי}}{=}r(sm)=0_M$

$\Leftarrow rm\in Tor(M)$

$Tor(M)$ נקרא תת-מודול של פיתול (torision)

הגדרה: יהיו M,N מודולים מעל R. הומו' של R-מודולים הוא הומומורפיזם $f:M\to N$ של חבורות אבליות שמתחלף עם הכפל הסקלרי. כלומר:

לכל $r\in R$, $m_1,m_2\in M$: $f(m_1+m_2)=f(m_1)+f(m_2)$

$f(rm_1)=f(r)f(m_1)$

הומו' חח"ע ועל נקרא איזומורפיזם

הגדרה: יהי M R-מודול. יהי $N\leq M$ תת-מודול. מודול המנה M/N הוא החבורה האבלית M/N (מוגדרת כי M אבלית $\Leftarrow N\trianglelefteq M$) עם כפל סקלרי $r(m+N)=rm+N$

זה מוגדר היטב כי $m_1+N=m_2+N \Leftarrow$ קיים $n\in N$ כך ש $m_2=m_1+n$

$$rm_2=rm_1+\underbrace{rn}_{\in N}$$

כי N תת-מודול

לכן, $rm_1+N=rm_2+N$

תרגיל:

א) יהי $f:M\to N$ הומומורפיזם של R-מודולים. אזי

$$\ker(f)=\{m\in M : f(m)=0_N\}$$

ב) הוא תת מודול של M.

משפט האיזו הראשון: $M/\ker(f)\cong \underbrace{f(M)}_{\text{תת מודול של } N}$

ג) לכל תת מודול $L\le N$, $f^{-1}(L)\le M$ תת-מודול של M.

ד) לכל $k\le M$ תת-מודול, $f(k)\le N$ תת מודול

ה) משפט האיזו הרביעי: M R-מודול, $N\le M$ תת מודול. יש העתקה טבעית

$f:M\to M/N$

$f(m)=m+N$

ההתאמה היא חח"ע ועל

$$\left\{\text{תת-מודולים של } M/N\right\} \longleftrightarrow \left\{\text{תת מודולים של } M \text{ שמכילים } N\right\}$$

$$f(k) \longleftarrow k$$

$$L \longmapsto f^{-1}(L)$$

הגדרה: יהי M R-מודול. תהי $B\subseteq M$ תת קבוצה. תת-המודול הנוצר על ידי M

הוא $\{r_1b_1+\dots+r_nb_n \mid n\ge 0, r_i\in R, b_i\in B\}\le M$

M נוצר על ידי B אם M הוא תת המודול הנוצר על ידי B.

(כלומר, אפשר לרשום כל איבר ב-M כ"צירוף לינארי" של איברי M עם מקדמים מ-R)

M נוצר סופית אם אפשר לקחת B סופי.

M חופשי אם קיימת תת-קבוצה B כך שאת כל איבר של M אפשר לרשום באופן יחיד כצירוף לינארי $r_1b_1+\ldots+r_nb_n$ $(r_i\in R, b_i\in B)$

משפט מלינארית:

אם $R=F$ שדה, אזי כל R-מודול הוא חופשי

זה לא נכון באופן כללי:

למשל $M=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $R=\mathbb{Z}$

לכל $m\in M$ $0_m=6m$ אז אין סיכוי לרשום איברים באופן יחיד כצירוף לינארי של משהו

תזכורת:

יהיו $R\subset S$ חוגים חילופיים. איבר $s\in S$ נקרא שלם מעל R אם s הוא שורש של פולינום מתוקן ב-$R[x]$:

$s^n+r_{n-1}s^{n-1}+\ldots+r_1s+r_0=0_R$

עבור $r_i\in R$ מתאימים

תזכורת:

$R\leq R[s]\leq S$ תת החוג הנוצר על ידי s מעל R:

$R[s]=\{a_ms^m+\ldots+a_1s+a_0 | a_i\in R, s\in S\}$

טענה:

יהיו $R\subset S$ חוגים חילופיים. יהי $s\in S$. התנאים הבאים שקולים:

1) s שלם מעל R

2) $R[s]$ הוא R-מודול נוצר סופית (עם מבנה המודול שבא מ- $R\subset R[s]$)

3) קיים תת חוג $R[s]\subseteq T\subseteq S$ כך ש-T נוצר סופית כ-R-מודול

4) קיים $R[s]$-מודול נאמן M כך ש-M נוצר סופית כ-R-מודול (מת"ס)

רק לכפל בסקלרים מ-R)

הוכחה:

($2 \Rightarrow 3$) ניקח $T=R[S]$

($3 \Rightarrow 4$) ניקח $M=T$. נאמן כי $1\in T \Rightarrow$ אם $r\in R[S]$, $r\in Ann(M)$ אזי $r\cdot 1=0 \Rightarrow r=0$

($1 \Rightarrow 2$) ברור כי $R[S]$ נוצר כ-R-מודול על ידי $1,s,s^2,s^3,\dots$ אבל אם s שלם מעל R, אזי

$$s^n+r_{n-1}s^{n-1}+\dots+r_1s+r_0=0$$

לכן

$$s^n=-r_{n-1}s^{n-1}-\dots-r_1s-r_0$$

כמו כן:

$$s^{n+1}=ss^n=-r_{n-1}s^n-\dots-r_1s^2-r_0s=(r_{n-1}^2s^{n-1}+r_{n-1}r_{n-2}s^{n-2}+\dots+r_{n-1}r_0)=$$

$$=-r_{n-1}s^n-r_{n-2}s^{n-1}-\dots-r_1s^2-r_0s$$

באינדוקציה כל חזקה של s היא צירוף לינארי של $1,s,\dots,s^{n-1}$

לכן $R[S]$ נוצר כ-R-מודול על ידי $1,s,\dots,s^{n-1}$, והוא נוצר סופית.

($4 \Rightarrow 1$) בהרצאה הבאה...