פתרון תרגיל 2 אינפי 1 תיכוניסטים תש"ף

13 בנובמבר 2019

1. נשתמש בהגדרת הגבול.

(א) יהי $\varepsilon > 0$, נחפש n_ε עבורו מתקיים: $\left|\frac{6n+2}{3n+3} - 2\right| < \varepsilon$ לכל $n_\varepsilon < n$. אם כן:

$$\left|\frac{6n+2}{3n+3} - 2\right| < \varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{6n+2-6n-6}{3n+3}\right| < \varepsilon \Longrightarrow \frac{4}{3n+3} < \varepsilon$$

כדי לפשט, נגדיל את הביטוי:

$$\frac{4}{3n+3} < \frac{4}{3n} < \varepsilon$$

נקבל: $\frac{4}{3\varepsilon} < n$, ולכן: $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{4}{3\varepsilon} \right\rceil$ יקיים את הדרוש.

* נראה זאת: עבור $n_\varepsilon < n$, מתקיים:

$$\frac{4}{3\varepsilon} \le \left\lceil \frac{4}{3\varepsilon} \right\rceil = n_\varepsilon < n$$

כלומר $\frac{4}{3\varepsilon} < n$, ולכן: $\frac{4}{3n} < \varepsilon$, ומכאן נקבל:

$$\left|\frac{6n+2}{3n+3} - 2\right| = \left|\frac{6n+2-6n-6}{3n+3}\right| = \frac{4}{3n+3} < \frac{4}{3n} < \varepsilon$$

כנדרש.

(ב) נניח בשלילה ש־3 הוא הגבול. נתבונן ב: $\varepsilon = \frac{1}{4}$ החמוד. לפי הגדרת הגבול, קיים n_ε כך שלכל n גדול ממנו מתקיים:

$$\left|\frac{6n+2}{3n+3} - 3\right| < \frac{1}{4} \Longrightarrow \left|\frac{6n+2-9n-9}{3n+3}\right| < \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{3n+7}{3n+3} < \frac{1}{4}$$

וזו סתירה, כי המונה גדול מהמכנה.

2. נפריד ונוכיח ביד רמה.

(א) הטענה נכונה. לשם כך, נשתמש באי־שוויון המשולש: $||x|-|y|| \leq |x-y|$ לכל $x,y \in \mathbb{R}$. יהי $\varepsilon > 0$, לפי הגדרת הגבול אנו צריכים למצוא n_ε שהחל ממנו: $||a_n|-|L|| < \varepsilon$. אנו יודעים ש: $a_n \longrightarrow L$, ולכן קיים n_ε שהחל ממנו: $|a_n - L| < \varepsilon$. לפי א"ש המשולש, $||a_n|-|L|| < |a_n - L|$, ונקבל $||a_n|-|L|| < \varepsilon$ כנדרש.

(ב) ממש לא. פר אקסמפל, נתבונן בסדרה: $a_n = (-1)^n$. $|a_n| = 1$ וגם מתכנסת ל־1, אבל הסדרה a_n כלל לא מתכנסת.

(ג) הטענה נכונה. יהי $\varepsilon > 0$, לפי הגדרת הגבול אנו צריכים למצוא n_ε שהחל ממנו: $|c_n - L| < \varepsilon$. אנו יודעים ש: $a_n, b_n \longrightarrow L$, ולכן קיים N_1 כך שלכל $N_1 < n$ מתקיים: $|a_n - L| < \varepsilon$, וקיים N_2 כך שלכל $N_2 < n$ מתקיים: $|b_n - L| < \varepsilon$. נסמן: $n_\varepsilon = \max\{N_1, N_2\}$. לכל $n > n_\varepsilon$ זוגי מתקיים:

$$|c_n - L| = |b_n - L| < \varepsilon$$

ולכל $n > n_\varepsilon$ אי־זוגי מתקיים:

$$|c_n - L| = |a_n - L| < \varepsilon$$

סה"כ, לכל $n > n_\varepsilon$ מתקיים: $|c_n - L| < \varepsilon$, כנדרש.