1. הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח $\{a_n\}$ סדרת קושי לכן היא מתכנסת לגבול $a\in\mathbb{R}$ כלומר $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה כלשהי. לפי הגדרת הרציפות $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ ולכן לפי היינה $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = a$ כלומר הסדרה $\{f(a_n)\}$ מתכנסת, ולכן היא קושי.

[שימו לב: שאם יש איברים a_k כך ש $a_k = a$ צריך לזרוק אותם מהסדרה על מנת שהיא תקיים את התנאים של היינה, אבל ממילא $f(a_k) = f(a)$ ולכן הגבול של הסדרה כולה ישאר $f(a)$.]

$\Rightarrow$ניקח $f(x) = x$ שהיא כמובן פונקציה רציפה. לכן $\{f(a_n)\} = \{a_n\}$ ולפי הנתון זו סדרת קושי.

2.

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3^{n^2}}{(n!)^3}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{(n+1)^2}}{((n+1)!)^3}\frac{(n!)^3}{3^{n^2}} = \frac{3^{n^2+2n+1}(n!)^3}{3^{n^2}\left((n+1)(n!)\right)^3} = \frac{3^{2n+1}}{(n+1)^3}$$ נוכיח באינדוקציה ש

$\dfrac{3^{2n+1}}{(n+1)^3} > 1$. עבור $n=1$ זה ברור $\dfrac{3^3}{2^3} > 1$. עבור $n+1$ נקבל

$$\frac{3^{2(n+1)+1}}{((n+1)+1)^3} = \frac{3^2 3^{2n+1}}{\left(n+1\right)^3 + 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1} \ge \frac{9 3^{2n+1}}{\left(n+1\right)^3 + 3(n+1)^3 + 3(n+1)^3 + (n+1)^3} =$$

$$= \frac{9}{8}\frac{3^{2n+1}}{\left(n+1\right)^3} > \frac{3^{2n+1}}{\left(n+1\right)^3} > 1$$ השלב האחרון נכון לפי הנחת האינדוקציה.

ולכן $|a_n|$ מונוטונית עולה, ולכן אינה שואפת לאפס, ולכן a_n אינה שואפת לאפס ולכן הטור מתבדר.

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sin n^2}{n^{\frac{5}{4}}}$.

$\left|(-1)^n \dfrac{\sin n^2}{n^{\frac{5}{4}}}\right| \le \dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$. אבל ידוע ש $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ מתכנס עבור $\alpha > 1$ וכמובן ש$\dfrac{5}{4} > 1$

ולכן הטור מתכנס בהחלט.

c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{(\log n)^2}$.

נשים לב שהסדרה $\dfrac{1}{(\log n)^2}$ יורדת מונוטונית לאפס. נפעיל את מבחן העיבוי

$\sum 2^n a_{2^n} = \sum \dfrac{2^n}{(\log(2^n))^2} = \sum \dfrac{2^n}{(n\log(2))^2}$. באינדוקציה דומה לקודמת, הסדרה אינה שואפת לאפס, ולכן הטור $\sum 2^n a_{2^n}$ אינו מתכנס, ולכן גם הטור המקורי אינו מתכנס בהחלט לפי מבחן העיבוי.

אבל הסדרה מקיימת גם את תנאי משפט לייבניץ ולכן הטור מתכנס, כלומר הוא מתכנס בתנאי בסה"כ.

3. תשובה במחברת ההרצאה

4.

a. $x^2\dfrac{\sin x}{|\sin x|}$ אינה רציפה כאשר $|\sin x|$ מתאפסת, וזה קורה כאשר $\sin x$ מתאפסת, וזה קורה כאשר $x=\pi k$ לכל $k\in\mathbb{Z}$ שלם. נחשב את הגבול בנקודה:

כאשר $k=0$, $\lim\limits_{x\to 0}x^2\dfrac{\sin x}{|\sin x|}=0$ כי $\dfrac{\sin x}{|\sin x|}=\pm 1$ חסומה, וכפול פונקציה ששואפת לאפס, סה"כ שואף לאפס. ולכן אפס הינה נקודת אי רציפות סליקה.

כאשר $x=\pi k\neq 0$ אז $\lim\limits_{x\to\pi k^+}x^2\dfrac{\sin x}{|\sin x|}=(\pi k)^2\left[\pm 1\right]=\pm(\pi k)^2$ והגבול השמאלי תמיד שווה להפך כי סינוס שלילי בצד אחד של האפס, וחיובי בצד השני שלו. ולכן נקודת האי רציפות הינה ממין ראשון כי הגבולות הצדדיים קיימים וסופיים ושונים.

b. $\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{3+2\cos\frac{1}{x}}$. אי רציפות כאשר $x=0$ וכאשר $3+2\cos\dfrac{1}{x}=0$ אבל

$3+2\cos\dfrac{1}{x}\geq 3+2(-1)=1>0$ ולכן זה לא קורה לעולם. נבדוק את הגבול

$\dfrac{1}{3+2\cos\frac{1}{x}}\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{3+2\cos\frac{1}{x}}$. אבל $\dfrac{1}{5}\leq\dfrac{1}{3+2\cos\frac{1}{x}}\leq\dfrac{1}{1}$ כלומר

חסומה, וכאשר $x\to 0$ אזי $-\dfrac{1}{x^2}\to-\infty$ ולכן $e^{-\infty}\to 0$ (רישום לא מדויק).

כלומר קיבלנו אפס כפול חסומה, וזה שואף לאפס. ולכן $x=0$ נקודת אי רציפות סליקה.

c. $f=\sin\left(\dfrac{1}{\log x^2}\right)$. נקודת אי רציפות באפס כי $\log 0$ אינו מוגדר, וב± 1 כי $\log(\pm 1)=0$. באפס, נחשב $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{\log x^2}\right)$. $\lim\limits_{x\to 0}\log x^2=-\infty$ ולכן

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\log x^2}=0$ ולכן $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{\log x^2}\right)=0$ ולכן $x=0$ נקודת אי רציפות סליקה.

נוכיח שהגבול החד צדדי $\lim\limits_{x\to 1^+}\sin\left(\dfrac{1}{\log x^2}\right)$ אינו קיים.

$y_n=\sqrt{e^{\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}}}$, $x_n=\sqrt{e^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}}}$. $1\leq x_n,y_n\to 1$ (כי $\sqrt{e^{\frac{1}{\infty}}}=\sqrt{e^0}=1$) אבל $1=f(x_n)\to 1$ ו$-1=f(y_n)\to -1$ לכן לא קיים גבול חד צדדי ו$x=1$ נקודת אי רציפות מהמין השני.

עבור $x=-1$ ניקח את $-x_n,-y_n$ ונקבל בצורה דומה שגם היא מהמין השני.

5.

a. $\cos\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$. $1+x^2>0$ ולכן הפונקציה רציפה על כל הממשיים. כעת,

$\lim_{x\to\pm\infty}\cos\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}=\cos(0)=1$. הגבולות בשתי הקצוות קיימים וסופיים ולכן לפי

משפט הפונקציה רציפה במ"ש בקטע $(-\infty,\infty)$.

b. $\tan\frac{10}{1+x^4}$. נפתור את המשוואה $\frac{10}{1+x^4}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{10}{\frac{\pi}{2}}-1=x^4$ ולכן $x=\sqrt[4]{\frac{20-\pi}{\pi}}$

וזה אפשרי כי $\frac{20-\pi}{\pi}\geq 0$. ולכן $x=\sqrt[4]{\frac{20-\pi}{\pi}}$ הינה נקודת אי רציפות של

הפונקציה, ובפרט היא אינה רציפה במ"ש.

c. $f=e^{(\sin x)^2}$. $g(x)=\cos x$, $h(x)=e^{x^2}$ ולכן $f=h(g)$ וזו הרכבה של פונקציה

רציפה h על פונקציה מחזורית ורציפה g , ולכן סה"כ f הינה רציפה ומחזורית

ולכן רציפה במ"ש.

6.

a. $2^{x^e}\cdot e^{x^x}$.

$$\left[2^{x^e}\cdot e^{x^x}\right]'=\left[2^{x^e}\right]'e^{x^x}+2^{x^e}\left[e^{x^x}\right]'=\left[e^{\log 2^{x^e}}\right]'e^{x^x}+2^{x^e}e^{x^x}\left[x^x\right]'=$$

$$=\left[e^{x^e\log 2}\right]'e^{x^x}+2^{x^e}e^{x^x}\left[e^{x\log x}\right]'=2^{x^e}ex^{e-1}\log 2\cdot e^{x^x}+2^{x^e}e^{x^x}x^x\left[\log x+1\right]=$$

$$2^{x^e}e^{x^x}\left[ex^{e-1}\log 2+x^x\left[\log x+1\right]\right]$$

b.

$$\left[\frac{\tan\left(e^{x^2}\right)}{\sqrt{(\log x)^2+1}}\right]'=\frac{\left[\tan\left(e^{x^2}\right)\right]'\sqrt{(\log x)^2+1}-\tan\left(e^{x^2}\right)\left[\sqrt{(\log x)^2+1}\right]'}{(\log x)^2+1}=$$

$$\frac{\frac{2xe^{x^2}}{\left[\cos e^{x^2}\right]^2}\sqrt{(\log x)^2+1}-\tan\left(e^{x^2}\right)\frac{2\log x}{2x\sqrt{(\log x)^2+1}}}{(\log x)^2+1}$$

c.

$$\frac{1}{\log\left(\log e^{e^x}\right)}=\frac{1}{\log\left(e^x\log e\right)}=\frac{1}{\log\left(e^x\right)}=\frac{1}{x\log(e)}=\frac{1}{x}$$

$$\left[\frac{1}{x}\right]'=-\frac{1}{x^2}$$

7. $\Leftarrow$ נניח שהטור מתכנס בהחלט, לכן $\sum|a_n|<\infty$. תהי b_n סדרה חסומה כלשהי, לכן קיים

k כך ש $|b_n|\leq k$ ולכן $|a_nb_n|=|a_n||b_n|\leq k|a_n|$ ולפי מבחן ההשוואה $\sum|a_nb_n|<\infty$ כלומר

הטור מתכנס בהחלט, ולכן מתכנס.

$\Rightarrow$ניקח את הסדרה $b_n = \frac{|a_n|}{a_n}$. לכן $|b_n| = \left|\frac{|a_n|}{a_n}\right| = 1$ סדרה חסומה. ולכן לפי הנתון b_n

$\sum a_n b_n < \infty$ אבל $\sum a_n b_n = \sum a_n \frac{|a_n|}{a_n} = \sum |a_n|$ כלומר $\sum a_n$ מתכנס בהחלט כפי

שרצינו.