אינפי 1 - תרגיל 2

2. יהי $x \in \mathbb{R}$ מספר ממשי המקיים $x \geq 0$. נניח בנוסף $\forall \varepsilon > 0 : x < \varepsilon$. הוכח/הפרך: $x = 0$.

3. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ כך שקיים $\varepsilon > 0$ כך ש $\forall a \in A : a > \varepsilon$ הוכח שאפס אינו החסם התחתון של A.

4. תהיי $B = \left\{ (-1)^{n-1}(2 + \frac{3}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. מצא חסם עליון, חסם תחתון, מינימום ומקסימום (כאשר הם קיימים)

5. יהיו קבוצות לא ריקות $A, B \subseteq \mathbb{R}$, נניח שמתקיים $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$ (כל איבר ב A קטן שווה מכל איבר ב B)

*א. הוכח: $\sup A \leq \inf B$ (תרגיל חשוב מאד. יש להשתמש באפסילון)

ב. נניח שמתקיים שיוויון בסעיף א', כלומר, $\sup A = \inf B$. הוכח/הפרך: $A \cap B \neq \phi$. (במילים: יש איבר שנמצא גם ב A וגם ב B).

ג. אם הוכחת בסעיף ב', מה הוא האיבר המשותף ל A ו B? אם הפרכת, מתי כן יהיה לשתי הקבוצות איבר משותף?

6. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$, נתון $0 \notin A$. נגדיר את הקבוצה A^{-1} באופן הבא $A^{-1} = \left\{ \frac{1}{a} \mid a \in A \right\}$. הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית:

א. אם A חסומה מלעיל אזי A^{-1} חסומה מלעיל

ב. אם A חסומה מלעיל אזי A^{-1} חסומה מלרע

ג. אם A^{-1} חסומה מלעיל אזי A חסומה מלעיל

ד. אם A^{-1} חסומה מלעיל אזי A חסומה מלרע

7. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל. נגדיר $B = \{-a \mid a \in A\}$ הוכח ש B חסומה מלרע וש- $\inf B = -\sup A$

8. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ כך ש $\forall a \in A : a > 0$ ותהיי $A^{-1} = \left\{ \frac{1}{a} \mid a \in A \right\}$.

הוכח ש m חסם תחתון של A $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{m}$ חסם עליון של A^{-1} (ואפס חסם תחתון של A אם"ם A^{-1} לא חסומה).