פתרון תרגיל 7 חדוא 2

שאלה 1:

א. רדיוס ההתכנסות: $R=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{n^3}}=\frac{1}{\lim\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}=1$

נציב קצוות: $\sum n^3,\sum\left(-1\right)^n n^3$ שניהם מתבדרים כיוון שהסדרה שלהם אינה שואפת לאפס.

סה"כ תחום ההתכנסות הינו $(-1,1)$

ב. $R=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{\lim\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2}=1$

נציב קצוות: $\sum\frac{1}{n^2},\sum\frac{\left(-1\right)^n}{n^2}$ שניהם מתכנסים בהחלט.

סה"כ תחום ההתכנסות הינו $[-1,1]$

ג. $R=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}}=2$

נציב קצוות: $\sum n^2,\sum\left(-1\right)^n n^2$ שניהם מתבדרים.

סה"כ תחום ההתכנסות הינו $(-2,2)$

ד. $R=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{\sqrt{n}}}=\frac{1}{\lim\sqrt{\sqrt[n]{n}}}=1$

נציב קצוות: $\sum\sqrt{n},\sum\left(-1\right)^n\sqrt{n}$ שניהם מתבדרים.

סה"כ תחום ההתכנסות הינו $(-1,1)$

ה. (במאמר מוסגר, זהו טור החזקות של $\cos(x)$ והוכחנו בכיתה שהוא מתכנס בכל הממשיים)

$$R=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[2n]{\frac{1}{(2n)!}}}$$

למדנו (באמצעות מבחן המנה) ש $\sqrt[n]{n!}\to\infty$ ולכן $R=\infty$

אין קצוות להציב.

סה"כ תחום ההתכנסות הינו $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$

ו. $$R=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{n\ln^p(n)}}}=\lim\sqrt[n]{n\ln^p(n)}\le\lim\sqrt[n]{n^{p+1}}=1$$

נציב קצוות: $\sum\frac{(-1)^n}{n\ln^p(n)}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

$\sum\frac{1}{n\ln^p(n)}$ מתכנס אם ורק אם $p>1$ לפי מבחן האינטגרל כיוון ש

$$\int^{\infty}\frac{1}{x\ln^p(x)}dx=\left\{\begin{matrix}t=\ln(x)\\ dt=\frac{dx}{x}\end{matrix}\right\}=\int^{\infty}\frac{1}{t^p}dx$$

סה"כ תחום ההתכנסות הינו: אם $p>1$ אז $[-1,1]$ אחרת $[-1,1)$

ז. נניח ש $a\ge b$, ולכן $\sqrt[n]{a^n+b^n}=a\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}\to a$ ולכן $R=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{a^n+b^b}}}=a$

נציב קצוות $\sum\frac{(-1)^n a^n}{a^n+b^n},\sum\frac{a^n}{a^n+b^n}$. אבל $\frac{a^n}{a^n+b^n}=\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}\to\begin{cases}1 & a>b\\ \frac{1}{2} & a=b\end{cases}$.

בכל מקרה הטורים מתבדרים כי הסדרה שלהם אינה שואפת לאפס.

סה"כ תחום ההתכנסות הינו $(1-a,1+a)$.

ח. $R=\frac{1}{\lim \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}}}=\frac{1}{\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n}}=\infty$

סה"כ תחום ההתכנסות הינו $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$

ט. $R=\frac{1}{\lim \sqrt[n^2]{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\lim \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}=1$

נציב את הקצוות: $\sum\frac{1}{n}$ שכמובן מתבדר, ו $\sum\frac{(-1)^n}{n}=\sum\frac{(-1)^{n^2}}{n}$ שמתכנס לפי מבחן לייבניץ.

שימו לב ש $(-1)^n=(-1)^{n^2}$ כיוון שהעלאה בריבוע לא משנה את הזוגיות של המספר.

סה"כ תחום ההתכנסות הינו $[-1,1)$

<u>שאלה 2</u>:

א. ידוע כי $\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

ולכן $\sin(x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{4n+2}$

ב. $\sin(x)\cos(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2(2n+1)!}x^{2n+1}$

כעת נשים לב כי $\frac{1}{2}\sin(2(x-\pi))=\frac{1}{2}\sin(2x-2\pi)=\frac{1}{2}\sin(2x)$

ולכן $\frac{1}{2}\sin(2x)=\frac{1}{2}\sin(2(x-\pi))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2(2n+1)!}(x-\pi)^{2n+1}$

ג. נציב $t=x-4$ ונקבל כי $x^3+2x=(t+4)^3+2(t+4)=t^3+12t^2+48t+64+2t+8$

נציב חזרה את x ונקבל את טור החזקות סביב $x=4$:

$$x^3+2x=72+50(x-4)+12(x-4)^2+(x-4)^3$$

הערה: היה ניתן למצוא את הטור באמצעות חישוב מקדמי טיילור (לפי הנגזרות).

ד. נציב $t = x - 2$ ונקבל:

$$e^{x^2-4x+5} = e^{(t+2)^2-4(t+2)+5} = e^{t^2+1} = e \cdot e^{(x-2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} e\frac{(x-2)^{2n}}{n!}$$

<u>שאלה 3</u>:

נזכור כי $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

$$\ln(r+x) = \ln\left(r\left(1+\frac{x}{r}\right)\right) = \ln(r) + \ln\left(1+\frac{x}{r}\right) = \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{nr^n} x^n$$

כיוון שהטור $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ מתכנס אם ורק אם $-1 < x \le 1$ לאחר ההצבה הטור החדש מתכנס אם ורק אם $-1 < \frac{x}{r} \le 1$ כלומר $x \in (-r, r]$ ורדיוס ההתכנסות הינו r.