

**אנליזה 1 למורים - פתרון תרגיל 8****שאלה 1**

הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in \mathbb{R}$  עבורה מתקיים:  $c^3 + c = 1$

**פתרון**

נגדיר פונקציה:  $f(x) = x^3 + x$

$F(x)$  פולינום ולכן פונקציה אלמנטרית ולכן רציפה בכל נקודה ובפרט בתחום:  $[0, 2]$

$$f(0) = 0, f(2) = 10$$

ולכן לפי משפט ערך הביניים הפונקציה  $f(x)$  מקבלת כל אחד מהערכים בין 0 ל-10 ובפרט מקבלת ערך 1 באיזשהו נקודה.

כלומר קיימת נקודה  $c \in [0, 2]$  כך ש:  $f(c) = 1$

$$f(c) = c^3 + c = 1$$

**שאלה 2**

הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה:  $\ln(2+x) = x$

**פתרון**

נגדיר פונקציה:  $f(x) = \ln(2+x) - x$

$F(x)$  פונקציה אלמנטרית ולכן רציפה בכל תחום הגדרתה.

$$f(-1) = \ln(2-1) + 1 = 1 > 0 \quad : x = -1$$

$$f(-1.9) = \ln(2-1.9) + 1.9 - 0.401 < 0 \quad : x = -1.9$$

קיבלנו כי  $f(-1) \cdot f(-1.9) < 0$

לכן, לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה  $c \in [-1.9, -1]$  עבורה מתקיים:  $f(c) = 0$

כלומר, קיים פתרון למשוואה.

### שאלה 3

גזרו את הפונקציות הבאות לפי ההגדרה:

א.  $f(x) = \cos(x)$

ב.  $g(x) = \frac{2x}{x+1}$

ג.  $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

### פתרון

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \left[ \lim_{h \rightarrow 0} -\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \right] \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \right] = \\ &= -\sin(x) \cdot 1 = -\sin(x) \end{aligned} \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2(x+h)}{x+h+1} - \frac{2x}{x+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x+2h)(x+1) - 2x(x+h+1)}{h(x+1)(x+h+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2x + 2hx + 2h - 2x^2 - 2xh - 2x}{h(x+1)(x+h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h(x+1)(x+h+1)} \quad \text{ב.} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{(x+1)(x+h+1)} = \frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2 + x+h} - \sqrt{x^2 + x}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt{(x+h)^2 + x+h} - \sqrt{x^2 + x}\right) \left(\sqrt{(x+h)^2 + x+h} + \sqrt{x^2 + x}\right)}{h \left(\sqrt{(x+h)^2 + x+h} + \sqrt{x^2 + x}\right)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 + x+h - x^2 - x}{h \left(\sqrt{(x+h)^2 + x+h} + \sqrt{x^2 + x}\right)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2 + h}{h \left(\sqrt{(x+h)^2 + x+h} + \sqrt{x^2 + x}\right)} \quad \text{ג.} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h+1)}{h \left(\sqrt{(x+h)^2 + x+h} + \sqrt{x^2 + x}\right)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x+h+1)}{\left(\sqrt{(x+h)^2 + x+h} + \sqrt{x^2 + x}\right)} \\ &= \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x}} \end{aligned}$$