ב"א אנליזה 1 תשפ מועד א

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\tan(x)}{1-\cos(x)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0} \sin(2x)\cdot\frac{\sin(x)\tan(x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\tan(x)}{x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos(x)}$$
$$= 1\cdot 1\cdot 2 = 2$$

(ב) $\lim_{x\to e} \ln(x)^{\frac{1}{x-e}}$

פתרון: נשתמש בכלל e מכיוון ש $\lim_{x\to e}\ln(x) = 1$ לחשב:

$$\lim_{x\to e} \ln(x)^{\frac{1}{x-e}} = e^{\left(\lim_{x\to e}(\ln(x)-1)\cdot\frac{1}{x-e}\right)} = e^{\left(\frac{1}{e}\right)}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מ:

$$\lim_{x\to e}(\ln(x)-1)\cdot\frac{1}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln(x)-1}{x-e} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{e}$$

(ג) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n+1}$

פתרון: נראה כי $\frac{n^3}{2^n}\to 0$ ואז

$$\frac{n^3}{2^n+1} = \frac{n^3}{2^n}\frac{1}{\left(1+\frac{n}{2^n}\right)} = \frac{n^3}{2^n}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n^3}{2^n}\right)} \to 0\cdot\frac{1}{(1+0)} = 0$$

אכן: נשתמש בכלל המנה ונגדיר $a_n = \frac{n^3}{2^n}$ ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^3} = \frac{2^n}{2^{n+1}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{2}\cdot 1^3 = \frac{1}{2}$$

וכיוון ש $\frac{1}{2}<1$ נקבל ש $\lim a_n = 0$.

2. נביט בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{\sin(x)} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x=0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin(x)}=a$$

לכל a, מתקיים

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin(x)}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos(x)}=\frac{1}{1}=1$$

ולכן רק עבור $a=1$ מתקיים השיוויון הדרוש.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?

פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a=1$ (שזה המקרה היחיד בו f רציפה ב $x=0$) אם f גזירה ב $x=0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{\sin(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin(x)}{x\cdot\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin(x)}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin(x)}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin(x)}{x^2}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)}{2x}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin(x)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

ולכן f גזירה ב $x=0$ ומתקיים $f'(0)=\frac{1}{2}$.

3. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$ לכל n טבעי.

(א) הוכיחו כי הסדרה a_n עולה.

פתרון: לכל n טבעי מתקיים $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$ ולכן

$$a_{n+1}-a_n=a_n^2-2a_n+1=(a_n-1)^2\geq 0$$

ולכן $a_{n+1} \geq a_n$

(ב) נתון בנוסף כי הסדרה מתכנסת לגבול סופי, הוכיחו כי $a_1 \leq 1$.

פתרון: כיוון שהסדרה עולה וגבולה סופי אזי הסדרה חסומה. נסמן את הגבול ב L, כלומר $a_n \to L$ ואז גם $a_{n+1} \to L$ ומהגדרת הסדרה נקבל

$$L \leftarrow a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \to L^2 - L + 1$$

ולכן $L = L^2 - L + 1$. בדומה למקודם נקבל ש $L^2 - 2L + 1 = 0$ ויש פתרון יחיד לשיוויון שהוא $L = 1$. כיוון שהגבול של סדרה עולה חוסם אותה מלמעלה נקבל שלכל n מתקיים $a_n \leq L = 1$ ובפרט $a_1 \leq 1$ כנדרש.

4. יהא $a \in \mathbb{R}$ קבוע.

(א) מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x \cdot e^{\left(x^2\right)} = a$.

פתרון: נגדיר פונקציה

$$f(x) = x \cdot e^{\left(x^2\right)} - a$$

ונשאל שאלה שקולה: לכל ערך של a, כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x) = e^{\left(x^2\right)} + x \cdot 2xe^{\left(x^2\right)} = e^{\left(x^2\right)}\left(1 + 2x^2 \cdot e\right)$$

ולכן,הנגזרת תמיד חיוביות (ושונה מאפס). מכאן ש $f(x)$ עולה ממש ולכן יש לה לכל היותר שורש אחד. בנוסף:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x \cdot e^{\left(x^2\right)} - a = \{\infty \cdot \infty - a\} = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{\left(x^2\right)} - a = \{-\infty \cdot \infty - a\} = -\infty$$

ולכן קיימים c, d ממשיים כך ש $f(d) > 0$ ו $f(c) < 0$. בקטע $[c, d]$ הפונקציה f רציפה ומחליפה סימן ולכן לפי משפט ערך הביניים יש לה שם שורש. לסיכום: ל f יש לכל היותר שורש ויש לה שורש ולכן יש לה בדיוק שורש אחד.

(ב) מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^{\left(x^2\right)} = 2e \cdot x$.

פתרון: באופן שקול נבדוק כמה פתרונות יש למשוואה $\frac{e^{\left(x^2\right)}}{2} = e \cdot x$. נגדיר פונקציה

$$f(x) = \frac{e^{\left(x^2\right)}}{2} - e \cdot x$$

ונשאל שאלה שקולה: כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x) = xe^{\left(x^2\right)} - e$$

וראינו בסעיף קודם של $f'(x)$ יש נקודה יחידה בה היא מתאפסת (אם ניקח בסעיף הקודם $a = e$). קל לראות ש $f(1) = 0$. ולכן נוכל להעיזר בטבלה

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+

להסיק כי f יורדת עד 1 ועולה מ 1 ולכן 1 נקודת מינימום. הערך בנקודה זו היא $f(1) = \frac{e}{2} - e < 0$. בנוסף

$f(0)=\frac{1}{2}>0$ ו $f(2)=\frac{e^4}{2}-2e>\frac{2^4}{2}-2\cdot 3=8-6>0$ ולכן בקטע $[1,2]$ ובקטע $[0,1]$ הפונקציה f מחליפה סימן. כיוון ש f רציפה בקטעים אלו, לפי משפט ערך הביניים היא מתאפסת שמה. כיוון f לא מתאפסת בקצוות הקטעים נקבל שהיא מתאפסת בקטע $(1,2)$ וב $(0,1)$ ולכן אלו שתי נקודות שונות. מכיוון שראינו ש f עולה מ 1 כלומר בקטע $(1,\infty)$ היא מתאפסת שמה פעם אחת לכל היותר ומכיוון שראינו שהיא מתאפסת שמה - היא מתאפסת שמה בדיוק פעם אחת. באופן דומה, היא מתאפסת ב $(-\infty,1)$ פעם אחת בדיוק. לכן בסה"כ f מתאפסת פעמיים בדיוק.

5. תהיא f פונקציה המוגדרת בקטע A ותהי $a\in A$ נקודה בקטע. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) אם $f'(a)=0$ ו $f''(x)>0$ בקטע אזי $x=a$ היא נקודת מינימום של f.
פתרון: מכיוון ש $f''(x)$ חיובית בקטע אזי $f'(x)$ עולה בקטע. מכיוון ש $f'(a)=0$ נקבל שמשמאלה $f'<0$ ומימינה $f'>0$. מכאן ש f משמאל ל a יורדת ומימין ל a עולה ולכן a נקודת מינימום של f.

(ב) אם $f'(a)=f''(a)=f'''(a)=0$ ו $f''''(x)>0$ בקטע אזי $x=a$ היא נקודת מינימום של f.
פתרון: לפי סעיף קודם נקבל ש a נקודת מינימום של f'' (שהרי $(f'')'(a)=f'''(a)=0$ ו $(f'')''(x)=f''''(x)$ חיובית בקטע.

מכיוון ש $f''(a)=0$ נקבל שמשמאלה $f''>0$ וגם מימינה $f''>0$. מכאן ש f' משמאל ל a עולה וגם מימין ל a עולה ובקיצור: f' עולה בקטע A.

מכיוון ש $f'(a)=0$ נקבל שמשמאלה $f'<0$ ומימינה $f'>0$. מכאן ש f משמאל ל a יורדת ומימין ל a עולה ולכן a נקודת מינימום של f.