בס"ד

מבחן באלגברה ליניארית 1 תשע"ג סמסטר קיץ מועד א

מרצה: ד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על כל חמשת השאלות, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

ציון:

בהצלחה

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 1 (20 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases}5x+10y+15z=0\\-2x+y+z=0\\3x+21y+30z=0\end{cases}$ מעל שדה הממשיים.

א. מצאו בסיס ומימד למערכת המשוואות הנ"ל. (5 נקודות)

ב. נסמן את המרחב וקטורי הכולל את כל הפתרונות של מערכת המשוואות הנתונה ב W. נתון ש $U=span\{(1,2,1),(2,3,0),(5,8,1),(4,6,0)\}$.
מצא בסיס ומימד ל $U\cap W$. (5 נקודות)

ג. מצאו את הפתרון הכללי של מערכת המשוואות $\begin{cases}5x+10y+15z=-10\\-2x+y+z=-3\\3x+21y+30z=-27\end{cases}$.
(5 נקודות)

ד. נתון ש $A=\begin{pmatrix}5&10&15\\-2&1&1\\3&21&30\end{pmatrix}$. חשבו את $RankA$. נמקו את תשובתכם!
(5 נקודות)

פתרון

א. נדרג את המטריצה $\begin{pmatrix}5&10&15\\-2&1&1\\3&21&30\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}5&10&15\\-2&1&1\\3&21&30\end{pmatrix}\underset{\frac{1}{3}R_3\to R_3}{\overset{\frac{1}{5}R_1\to R_1}{\approx}}\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&1&1\\1&7&10\end{pmatrix}\underset{R_1-R_3\to R_3}{\overset{2R_1+R_2\to R_2}{\approx}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&5&7\\0&-5&-7\end{pmatrix}\overset{R_2+R_3\to R_3}{\approx}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&5&7\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

המשתנה החופשי הוא z. נבחר $z=5 \Leftarrow y=-7 \Leftarrow x=-1$.

הבסיס הוא $\{(-1,-7,5)\}$ והמימד הוא 1.

ב. תחילה נמצא בסיס למרחה וקטורי U.

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&0\\5&8&1\\4&6&0\end{pmatrix}\overset{\substack{2R_1-R_2\to R_2\\5R_1-R_3\to R_3\\4R_1-R_4\to R_4}}{\approx}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&2&4\\0&2&4\end{pmatrix}\overset{\substack{2R_2-R_3\to R_3\\2R_2-R_4\to R_4}}{\approx}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

הבסיס הוא $\{(1,2,1),(0,1,2)\}$.

נמצא את $U\cap W$. קיבלנו ש $\dim U=2$.

יש למצוא סקלרים שעבורם מתקיים $\alpha(1,2,1)+\beta(0,1,2)=\gamma(-1,-7,5)$

יש לפתור את מערכת המשוואות

$\begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ 2\alpha+\beta+7\gamma=0 \\ \alpha+2\beta-5\gamma=0 \end{cases}$ נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \underset{R_1-R_3\to R_3}{\overset{2R_1-R_2\to R_2}{\approx}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \overset{2R_2-R_3\to R_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}.$$

קיבלנו שהפתרון היחידי של המשוואה הוא הפתרון הטריוויאלי ולכן מרחב האפס הוא $U\cap W$.

ג. יש למצוא פתרון פרטי למערכת המשוואות.

הפתרון הפרטי הוא $(1,0,-1)$.

מסעיף א הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית הוא $\{t(-1,-7,5) | t\in\mathbb{R}\}$

הפתרון הכללי של המערכת הלא הומוגנית הוא $(1,0,-1)+t(-1,-7,5)$.

ד. מימד מרחב הפתרונות של המשוואה $\begin{cases} 5x+10y+15z=0 \\ -2x+y+z=0 \\ 3x+21y+30z=0 \end{cases}$ הוא 1 ומספר הנעלמים הוא 3 ולכן דרגת המטריצה היא 2.

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 2 (20 נקודות)

יהיו $S=\{1,x,x^2,x^3\}$, $B=\{1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3\}$

בסיסים למרחב וקטורי $P_3(x)$.

א. חשבו את ווקטור הקואורדינאטות של $p(x)=x^3$

i. ביחס לבסיס B. (5 נקודות)

ii. ביחס לבסיס S. (5 נקודות)

ב. מצא מטריצת מעבר P מבסיס B לבסיס S. הראה שאכן $P[x^3]_B=[x^3]_S$.

(5 נקודות)

ג. מצא מטריצת מעבר Q מבסיס S לבסיס B. הראה שאכן $P[x^3]_S=[x^3]_B$.

(5 נקודות)

פתרון

א. נרשום את $p(x)=x^3$ כצירוף ליניארי של הבסיס B.

$x^3=0\cdot1+0\cdot(1+x)+(-1)\cdot(1+x+x^2)+1\cdot(1+x+x^2+x^3)$ ולכן

$[x^3]_B=(0,0,-1,1)$.

נרשום את $p(x)=x^3$ כצירוף ליניארי של הבסיס S.

$x^3=0\cdot1+0\cdot x+0\cdot x^2+1\cdot x^3$ ולכן $[x^3]_S=(0,0,0,1)$.

ב. נרשום כל אחד מוקטורי הבסיס B כצירוף ליניארי של S.

$$1=1\cdot1+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3$$
$$1+x=1\cdot1+1\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3$$
$$1+x+x^2=1\cdot1+1\cdot x+1\cdot x^2+0\cdot x^3$$
$$1+x+x^2+x^3=1\cdot1+1\cdot x+1\cdot x^2+1\cdot x^3$$

המטריצה המשוחלפת של מטריצת המקדמים היא מטריצת המעבר.

$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ נשים לב ש $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

ג. המטריצה ההופכית למטריצה P היא מטריצת המעבר מבסיס S לבסיס B.

נמצא את המטריצה ההופכית

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{-R_4+R_3\to R_3 \\ -R_4+R_2\to R_2 \\ -R_4+R_1\to R_1}}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{-R_3+R_2\to R_2 \\ -R_3+R_1\to R_1}}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{-R_2+R_1\to R_1}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

מטריצת המעבר היא $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

נשים לב ש $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 3 (20 נקודות)

<u>סעיף א</u>

תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ונגדיר $V_A:=\left\{B\in\mathbb{F}^{n\times n}:BA=AB\right\}$.

i. הוכח ש V_A תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$. (5 נקודות)

ii. הוכח ש V_A סגור גם לכפל מטריצות. (5 נקודות)

<u>סעיף ב (10 נקודות)</u>

יהיו W,U תת-מרחבים של מרחב וקטורי V. הוכח:
אם $U\not\subset W\wedge W\not\subset U$ אז $U\cup W$ אינו תת-מרחב.

<u>פתרון</u>
<u>סעיף א</u>

i.

1. $0\cdot A=A\cdot 0=0$ ולכן $0\in V_A$ ז"א $V_A\neq\phi$.
2. נניח ש $B_1,B_2\in V_A$ ו $\alpha\in\mathbb{F}$.

$B_2A=AB_2\Leftarrow B_2\in V_A,B_1A=AB_1\Leftarrow B_1\in V_A$

$$\left(B_1+\alpha B_2\right)A=B_1A+\left(\alpha B_2\right)A=B_1A+\alpha\left(B_2A\right)=AB_1+\alpha\left(AB_2\right)=AB_1+A\left(\alpha B_2\right)=A\left(B_1+\alpha B_2\right)$$

ולכן $B_1+\alpha B_2\in V_A$.

ii.

נניח ש $B,C\in V_A$ ונוכיח ש $BC\in V_A$.

$BA=AB,CA=AC\Leftarrow B,C\in V_A$.

$BC\in V_A\Leftarrow\left(BC\right)A=B\left(CA\right)=B\left(AC\right)=\left(BA\right)C=\left(AB\right)C=A\left(BC\right)$.

<u>סעיף ב</u>

נניח ש $U\not\subset W\wedge W\not\subset U$.

$W\not\subset U$ ולכן $U\setminus W\neq\phi$ יהי $u\in U\setminus W$. $U\not\subset W$ ולכן $W\setminus U\neq\phi$ יהי $w\in W\setminus U$.

מכיוון ש $u\in U\setminus W$ אז $u\in U\cup W$ ומכיוון ש $w\in W\setminus U$ אז $w\in U\cup W$.

מספיק להראות ש $u+w\notin U\cup W$ ונראה סתירה למוגדרות במרחבים וקטורים.

נניח בשלילה ש $u+w\in U\cup W$ ז"א $u+w\in U$ או $u+w\in W$.

נניח ב.ה.ג.כ ש $u+w\in U$. מכיוון ש $u\in U$ ו U מרחב וקטורי קיים ל u איבר נגדי $-u\in U$.

$-u+\left(u+w\right)=\left(-u+u\right)+w=w\notin U$ וקיבלנו סתירה למוגדרות במרחב וקטורי U.

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 4 (20 נקודות)

סעיף א (10 נקודות)

i. תהי $E\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה אלמנטארית. אזי, לכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $|EA|=|E|\cdot|A|$. (5 נקודות)

ii. תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הוכיחו ש $|AB|=|A|\cdot|B|$. (5 נקודות)

סעיף ב (10 נקודות)

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\3&0&2\end{pmatrix}$.

i. רשום את המטריצה A כמכפלה של מטריצות אלמנטאריות. (4 נקודות)

ii. חשב את הדטרמיננטה של A בעזרת המטריצות האלמנטאריות שקיבלת בסעיף קודם. (3 נקודות)

iii. נתונה מטריצה $B\in\mathbb{R}^{3\times3}$. נתון ש $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המשוואה $Bx=0$.

מצא את $|AB|$ (נמק את תשובתך). (3 נקודות)

פתרון

סעיף א

i.

אם E_1 מתקבלת ע"י הכפלת שורה בקבוע α שונה מאפס נקבל ש $|E_1|=\alpha$.

$|E_1A|=|\rho(A)|=\alpha|A|=|E_1|\cdot|A|$.

אם E_2 מתקבלת ע"י החלפת שתי שורות זו בזו נקבל ש $|E_2|=-|I|=-1$.

$|E_2A|=|\rho(A)|=-|A|=|E_2|\cdot|A|$.

אם E_3 מתקבלת ע"י הוספת כפולה של שורה אחת לאחרת נקבל ש $|E_3|=|I|=1$.

$|E_3A|=|\rho(A)|=|A|=|E_3|\cdot|A|$.

ii.

אם A לא הפיכה אז $|A|=0$. A לא הפיכה ולכן AB לא הפיכה ואז $|AB|=0$

סה"כ נקבל ש $|AB|=|A|\cdot|B|\Leftarrow|AB|=0,|A|\cdot|B|=0\cdot|B|=0$.

אם A הפיכה אז ניתן לרשום את כמכפלה של מטריצות אלמנטאריות ולקבל $A=E_n\cdot\ldots\cdot E_2\cdot E_1$.

$|AB|=|E_n\cdot\ldots\cdot E_2\cdot E_1\cdot B|=|E_n|\cdot\ldots\cdot|E_2|\cdot|E_1|\cdot|B|=|A|\cdot|B|$.

<u>סעיף ב</u>

i.

נבצע פעולות שורה אלמנטאריות עד שנקבל את מטריצת היחידה.
עבור כל פעולת שורה אלמנטארית נרשום את המטריצה האלמנטארית המתאימה.

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\overset{-3R_1+R_3\to R_3}{\approx}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\3&0&2\end{pmatrix}$$ המטריצה המתאימה היא $E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\overset{R_2+R_3\to R_2}{\approx}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$ המטריצה המתאימה היא $E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\overset{R_1+R_3\to R_1}{\approx}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$ המטריצה המתאימה היא $E_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{-R_3\to R_3}{\approx}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$ המטריצה המתאימה היא $E_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

$$A=E_4^{-1}\cdot E_3^{-1}\cdot E_2^{-1}\cdot E_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$$

ii.

מהסעיף הקודם

$|A|=|E_4^{-1}|\cdot|E_3^{-1}|\cdot|E_2^{-1}|\cdot|E_1^{-1}|=-1\cdot1\cdot1\cdot1=-1$.

iii.

מכיוון שקיים פתרון לא טריוויאלי למשוואה $Bx=0$ נקבל שהמטריצה $B\in\mathbb{R}^{3\times3}$ לא הפיכה ולכן $|B|=0$ ואז $|AB|=|A|\cdot|B|=|A|\cdot0=0$.

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 5 (20 נקודות)

יהי V מרחב המטריצות מסדר n מעל השדה $\mathbb{R}$.

נגדיר $W=\left\{v\in V \middle| v^t=-v\right\}$, $U=\left\{v\in V \middle| v^t=v\right\}$.

א. הוכח כי U,W תת מרחבים של V. (5 נקודות)

ב. הוכח כי $V=U\oplus W$. (10 נקודות)

ג. מצא בסיס עבור מרחב המטריצות מסדר 3 המורכב ממטריצות סימטריות ואנטי סימטריות בלבד. (5 נקודות)

פתרון

א.

נוכיח תחילה ש U, W תת מרחבים של V.

נוכיח ש U תת מרחב של V.

מטריצת האפס היא סימטרית ולכן $\vec{0}\in U$.

יהיו $u_1,u_2\in U$ ז"א $u_1^t=u_1\wedge u_2^t=u_2$. $\left(u_1+u_2\right)^t=u_1^t+u_2^t=u_1+u_2\to u_1+u_2\in U$.

יהי $u\in U,\alpha\in R$ ז"א $u^t=u$. $\left(\alpha u\right)^t=\alpha u^t=\alpha u\to u\in U$.

על פי המשפט המקוצר U תת מרחה של V.

נוכיח ש W תת מרחב של V.

יהיו $w_1,w_2\in W$ ז"א $w_1^t=-w_1\wedge w_2^t=-w_2$.

$\left(w_1+w_2\right)^t=w_1^t+w_2^t=-w_1-w_2=-\left(w_1+w_2\right)\to w_1+w_2\in W$.

יהי $w\in W,\alpha\in R$ ז"א $w^t=-w$. $\left(\alpha w\right)^t=\alpha w^t=-\alpha w\to w\in W$.

על פי המשפט המקוצר W תת מרחב של V.

ב.

נוכיח ש $U\cap W=\{0\}$,

$$\begin{aligned}&A\in U\cap W\to A\in U\wedge A\in W\to A=A^t\wedge -A=A^t\\&A=-A\to 2A=0\to A=0\end{aligned}.$$

נוכיח ש $U+W=V$. יהי $A\in V$.

נסמן $B=\frac{1}{2}\left(A+A^t\right)$ נשים לב ש $B^t=B$ ולכן $B\in U$.

נסמן $C=\frac{1}{2}\left(A-A^t\right)$ נשים לב ש $C^t=-C$ ולכן $C\in W$.

סה"כ קיבלנו ש $A=B+C\in U+W$, ז"א $U+W=V$.

סעיף ג

תחילה שלושת האיברים הסימטריים מהבסיס הסטנדרטי הם:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

נשאר להציג את ששת האיברים הנותרים באמצעות מטריצות סימטריות ואנטי סימטריות.

נשתמש ברעיון של סעיף קודם, ונקבל:

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ז"א

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\in Span\left\{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

באותו אופן נקבל ש

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\in Span\left\{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\in Span\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן הבסיס המבוקש הוא:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}$$