חשבון אינפיניטסימלי 3

1 בנובמבר 2011

מתרגל: שי גולד.
מייל: shai314@gmail.com
שעות קבלה: בתיאום מראש.
הגשת תרגילים: כל שבוע בתרגול(אין שום אפשרות אחרת).
יודיעו בהמשך איפה התרגילים עצמם יופיעו(כנראה בhighlearn)

הגדרות בסיסיות(צורות גיאומטריות ב$\mathbb{R}^2$)

1. מעגל ־ המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה מסויימת קבוע.
משוואת מעגל מהצורה $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$
$x^2+y^{2=R}$הוא המעגל הקנוני

2. אליפסה ־ המקום הגאומטרי של כל הנקודות שסום מרחקיהן משתי נקודות קבועות הוא קבוע.
משוואת האליפסה הקנונית (מוקדיה נמצאים על ציר הx וסימטריים ביחס לציר הy):
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

דוגמה 1

הראה כי העקומה $15x^2+9y^2-64x-54y+1=0$היא אליפסה. שרטט!

פתרון

$$(16x^2-64x)+(9y^2-54y)=-1$$

נשתמש בהשלמה לריבוע

$$16\left(x^2-4x+4\right)+9\left(y^2-6y+9\right)=-1+64+81$$

$$16\left(x-2\right)^2+9\left(y-3\right)^2=144$$

$$\frac{\left(x-2\right)^2}{3^2}+\frac{\left(y-3\right)^2}{4^2}=1$$

ע"כ קיבלנו משוואת אליפסה שמרכזה בנקודה $(2,3)$. הציר הראשי מקביל לציר הy

הערות

- חיתוך הצירים המקרה זה נחשב מרכז הכובד.
- אורכי הצירים בהתאמה $2a$ו$2b$.
- שטח האליפסה הוא πab.

המשך הגדרות

3. היפרבולה: המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהפרש מרחקיהן משתי נקודות קבועות הוא קבוע.
משוואת היהפרבולה הקנונית(מוקדיה נמצאים על ציר הx וסימטריים ביחס לציר הy): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

4. פרבולה: המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקיהן מנקודה וישר קבועים הינו קבוע.
משוואת הפרבולה הקנונית(קודקודה נמצא בראשית והישר מקביל לציר הy):
$y^2 = \pm 2px$

דוגמה 2

שרטט את ההיפרבולה $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

פתרון

נשים לב כי סימן המינוס נמצא לפני ה$\frac{y^2}{9}$ולכן ציר ההיפרבולה מונח על ציר הx. בנוסף,
$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow (-2, 0), (2, 0)$
$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow (0, -3), (0, 3)$. ניתן לבנות את ההיפרבולה ע"י אלכסוני המלבן.
נשאר לבדוק אסימפטוטות. מספיק למצוא את משוואת האלכסונים.

טריק מפורסם

כדי למצוא את משוואות האסימפטוטות נפתור את המשוואה $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$(המשוואה המקורית היא $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, בשביל אסימפטוטות פתרנו $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$).
אם $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0 \Leftrightarrow y = \pm\frac{3}{2}x$

דוגמה 3

מצא את משוואת ההיפרבולה ששיעורי קודקודיה הם $(0, \pm 8)$ ומשוואת האסימפטוטות שלה היא $y = \pm\frac{4}{3}x$

פתרון

נתון שהקודקודים $(0,8)\,,(0,-8)$שנמצאים על ציר הy ולכן המשוואה היא מהצורה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. קל לקבל את המשוואה האסימפטוטית $y=\pm\frac{b}{a}x$(ע"י פתירת המשוואה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$) משיעורי הקודקודים $y=\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{8}{a}x=\pm\frac{y}{3}x\Leftarrow$נקבל $a=6$. המשוואה המבוקשת הינה $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

הפיכת משוואה כללית למשוואה קנונית

תהי המשוואה הכללית $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.
העקומה הנתונה היא מסדר 2. אם אחד מבין A,B,C שונה מאפס נגדיר את המטריצה $M=\begin{pmatrix}A & \frac{B}{2}\\ \frac{B}{2} & C\end{pmatrix}$ ולכן בכתיב מטריציוני ניתן לרשום את המשוואה הכללית כך:

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}D & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+F=0$$

נלכסן אותרוגונלית את M. נקבל $M=P^tM'P$ כאשר M' אלכסונית וP אורתוגונלית.
נסמן $pt\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}=(x,y)$ולאחר שינוי קורדינטות נקבל משוואה $\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}* & 0\\ 0 & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+\begin{matrix}linear\\ parts\end{matrix}=0$. כלומר תתקבל המשוואה $A'x'^2+B'y'^2+D'x'+E'y'+F=0$ כאשר $A'\,B'$ הע"ע של M

מסקנות

1. אם $A',B'>0$אז נקבל אליפסה.
2. אם מתקיים $A'=B'$ נקבל מעגל.
3. אם A',B' שוני סימן ושונים מאפס אז נקבל היפרבולה.
4. אם אחד מהם הוא אפס נקבל פרבולה.

הגדרה(נורמה)

יהי Vמרחב וקטורי. פונקציה $||\;||:V\to[0,\infty)$נקראת נורמה על V אם מתקיימים:

1. $||v||=0\Leftrightarrow v=0$
2. $\forall\alpha\in\mathbb{R}:||\alpha v||=|\alpha|\,||v||$
3. $\forall u,v\in V\;||u+v||\le||v||+||u||$(אי שוויון המשולש)

דוגמה 4

יהי $C\,[0,1]$ מרחב כל הפונקציות הרציפות $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. נגדיר $||f||_{max}=\max_{0\le x\le1}|f\,(x)|$.
הראה שאכן הנורמה הנ"ל עונה על ההגדרה.

פתרון

1. טריוויאלי, כי אם $f\left(x\right)=0$ ברור כי המקסימום שלה גם אפס. באופן דומה בכיוון השני(כי זהו מקסימום של קבוע).
2. נתבונן ב$||\alpha f||$.

$$||\alpha f||=\max_{0\leq x\leq1}\left|\alpha f\left(x\right)\right|=\left|\alpha\right|\max_{0\leq x\leq1}\left|x\right|$$

3. אי שוויון המשולש. צ"ל $||f+g||\leq||f||+||g||$. הוכחה:

$$||f+g||=\max_{0\leq x\leq1}\left|f\left(x\right)+g\left(x\right)\right|\leq\max_{0\leq x\leq1}\left\{ \left|f(x)\right|+\left|g\left(x\right)\right|\right\} \leq\max_{0\leq x\leq1}\left|f(x)\right|+\max_{0\leq x\leq1}\left|g(x)\right|=||f||+||g||$$

הגדרה(מטריקה)

יהי $X\neq\emptyset$. מטריקה על X היא פונקציה $d:X\times X\rightarrow[0,\infty)$ המקיימת את התכונות הבאות:

1. $d\left(x,y\right)=0\Leftrightarrow x=y$
2. $d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$
3. $\forall x,y,z\in X:d\left(x,z\right)\leq d(x,y)+d(y,z)$

דוגמה

הראה כי $d\left(f,g\right)=\max\left|f-g\right|$ היא מטריקה כאשר f פונקציה של x וg פונקציה של x.

פתרון

נבדוק כל סעיף בהתאם:

1. אם $f\left(x\right)=g\left(x\right)$אז ניתן לרשום $d\left(f(x),f(x)\right)=\max\left|f-f\right|=\max\left|0\right|=0$.
   בכיוון השני: ברור כי אם $d\left(x,y\right)=0$⇐$\max\left|x-y\right|=0$ מתחייב ש$x=y$
2. $d\left(f,g\right)=\max\left|f-g\right|=\max\left|-\left(g-f\right)\right|=\max\left|(-1)\right|\left|g-f\right|=\max\left|g-f\right|=d\left(g,f\right)$
3. נגדיר $f\left(x\right),g\left(x\right),h\left(x\right)$. צריך להראות כי $d(f,h)\leq d(f,g)+d(g,h)$.
   פתרון:

$$d\left(f,h\right)=\max\left|f-g\right|=\max\left|f-g+g-g\right|\leq\max\left\{ \left|f-g\right|+\left|g-h\right|\right\} \leq\max\left|f-g\right|+\max\left|g-h\right|=d\left(f,g\right)$$

מסקנה - אכן מטריקה!