

תרגיל בית 7 במבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תשע"ו

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא לתרגול בשבוע המתחיל בתאריך א' טבת ה'תשע"ו, 13.12.2015.

שאלה 1. חשבו בשיטה של חישוב חזקה בעזרת ריבועים את הביטויים הבאים. מותר להשתמש במחשבון (כולל בפונקציית המודולו) לחישובי הביניים, שאותם תפרטו:

1. $2790^{2753} \in \mathbb{Z}_{3233}$. רמז: בתרגול ראיתם שהתוצאה הסופית היא ההודעה שבו רצה לשלוח לאליס.

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^9 \in GL_2(\mathbb{Z}_{1000})$$

שאלה 2. עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

א. $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^{-3}$.

ב. $f : S_7 \rightarrow \mathbb{Z}$ המוגדרת לפי $f(\sigma) = \sigma(1)$.

ג. $f_x : G \rightarrow G$ המוגדרת לפי $f_x(g) = xgx^{-1}$ כאשר G חבורה ו- $x \in G$ איבר.

שאלה 3. יהי $f : G \rightarrow H$ הומומורפיזם.

א. הוכיחו שאם G אבלית, אז $\text{im } f$ תת חבורה אבלית.

ב. הסיקו מהסעיף הקודם שאם $G \cong H$, אז G אבלית אם ורק אם H אבלית.

ג. הוכיחו או הפריכו: קיים אפימורפיזם $\varphi : D_8 \rightarrow U_{17}$.

שאלה 4. בכל סעיף קבעו ונמקו האם החבורות איזומורפיות. רמז כללי: סדרים של איברים.

א. החבורה \mathbb{C}^* והחבורה

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

עם הפעולה של כפל מטריצות (שכבר הראיתם שהיא חבורה).

ב. החבורה \mathbb{Z}_{60} והחבורה $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6$.

ג. החבורה \mathbb{Z}_{33} והחבורה $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_3$.

ד. החבורה S_4 והחבורה $\mathbb{Z}_2 \times A_4$.

ה. החבורה S_5 והחבורה D_{60} .

שאלה 5. מצאו העתקות לפי התנאים הנתונים:

א. מצאו שיכון $f : A_4 \rightarrow S_6$.

ב. מצאו שיכון $f : S_5 \hookrightarrow S_6$ עבורו $f((1\ 2\ 3\ 4\ 5)) \neq (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$.

ג. מצאו הומומורפיזם לא טריוויאלי $f : \mathbb{Z}_8 \rightarrow D_4$ (נאמר שהומומורפיזם $\varphi : G \rightarrow H$ הוא טריוויאלי אם הוא שולח את כל איברי G אל e_H). למה הוא לא אפימורפיזם?

ד. מצאו אפימורפיזם $f : \mathbb{Z}_{200} \times 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4$.

שאלה 6 (רשות). תהי G חבורה ויהיו $x, y \in G$ איברים. נתון כי $|G| = 22$, $x \neq e$ וגם ש- y אינו חזקה של x . הוכיחו כי $\langle x, y \rangle = G$. אתגר: הוכיחו כי $G \cong D_{11}$.

שאלה 7 (אתגר רשות). תהי G חבורה סופית, ויהי α אוטומורפיזם של G השולח יותר משלושת רבעי G להופכי שלהם. כלומר

$$|\{x : \alpha(x) = x^{-1}\}| > \frac{3|G|}{4}$$

הוכיחו כי $\alpha(x) = x^{-1}$ לכל $x \in G$.

בהצלחה!