1. תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה:

(א) אם איברי A וגם A^{-1} שלמים אז $|A|^{100} = 1$

פתרון: טענה ראשונה: תהי B מטריצה שכל המספרים בה שלמים. אז $|B|$ היא מספר שלם.

הסבר: לפי שיטת התמורות ידוע שהדטרמיננטה של מטריצה מורכבת שמסכומים של איברי המטריצה, וסכומים ומכפלות של מספרים שלמים נותנים מספר שלם.

לכן $|A|, |A^{-1}| \in \mathbb{Z}$. נסמן: $|A| = d$.

ידוע ש $|A^{-1}| = |A|^{-1}$. לכן $|A^{-1}| = \dfrac{1}{d}$.

כלומר $d, \dfrac{1}{d} \in \mathbb{Z}$. לכן $d = \pm 1$. לכן $d^{100} = 1$.

(ב) אם איברי A רציונאלים אז A^{-1} רציונאלים.

פתרון: מההרצאה ידוע $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} adj(A)$.

האיברים ב$adj(A)$ הם דטרמיננטות של מינורים של A. אז גם הם מורכבים מסכומים ומכפלות של איברים מA. סכומים ומכפלות של איברים רציונליים יתנו איבר רציונלי.

$|A|$ היא גם כן מספר רציונלי, מאותה סיבה. ולכן האיברים בA^{-1} הם מנות של מספרים רציונליים, שזה יוצא מספר רציונלי.

הערה: לפי שיטת התמורות, $|A| = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)(\Pi A_{i,\sigma(i)})$

2. יהא V מ"ו ויהיו $v_1, v_2, \ldots, v_n$ וקטורים. הוכיחו/הפריכו: אם $v_1, \ldots, v_n$ בת"ל אזי הוקטורים $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1$ בת"ל.

פתרון: נקח צירוף לינארי מתאפס של הוקטורים החדשים, ונראה מה קורה.

$$\alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(v_2 + v_3) + \alpha_3(v_3 + v_4) + ... + \alpha_n(v_n + v_1) = 0$$

נסדר אותו כך שנקבל צירוף של הוקטורים המקוריים

$$(\alpha_1 + \alpha_n)v_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)v_2 + (\alpha_2 + \alpha_3)v_3 + ... + (\alpha_{n-1} + \alpha_n)v_n = 0$$

הוקטורים $v_1, ..., v_n$ בת"ל, לכן כל המקדמים שווים 0. השאלה שלנו היא האם $\alpha_1, ..., \alpha_n$ חייבים להיות 0.

$\alpha_1 = -4, \alpha_2 = 4$. אם n זוגי אז אפשר למצוא צירוף לינארי מתאפס לא טריוויאלי של הקבוצה השניה.

מה קורה אם n אי זוגי?

באופן כללי, השאלה שקולה לשאלה, האם למערכת הבאה יש פתרון לא טריוויאלי:

$$\alpha_1 + \alpha_n = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

וכו'. נציב במטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

השאלה שלנו היא האם המטריצה הפיכה. נחשב את הדטרמיננטה שלה.
נדרג את המטריצה ע"מ להגיע למטריצה משולשית עליונה. נעשה את הפעולות הבאות: $R_i - R_{i-1}$. נתחיל מ$i = 2$ ואז נעלה. כלומר, קודם $R_2 - R_1$. אח"כ $R_3 - R_2$ וכו'. כל פעם נאפס את האיבר שמתחת לאלכסון, ובקצה הימני של השורה יתווסף איבר, 1 או -1. כלומר, בשורה השניה יהיה -1. בשורה השלישית יהיה 1 וכו'. כשנגיע לשורה התחתונה, בקצה הימני יהיה כתוב $(-1)^{n-1} - 1$. כלומר, קיבלנו מטריצה משולשית, שכל איברי האלכסון שלה הם 1, חוץ מהאיבר האחרון שהוא $(-1)^{n-2} - 1$. אם n זוגי המטריצה לא הפיכה, ואם n אי זוגי המטריצה הפיכה. כלומר, עבור n זוגי הוקטורים יהיו תלויים, ועבור n אי זוגי הוקטורים החדשים יהיו בת"ל.

3. חשבו את ה $adj(A)$ עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$adj(A)_{i,j} = (-1)^{i+j}|M_{j,i}|$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -8 & -(-3) \\ & \\ & -(3) \end{pmatrix}$$

$$adj(A^t)_{i,j} = (-1)^{i+j}|M_{j,i}^{A^t}| = (-1)^{i+j}|M_{i,j}^{A}|$$

$$M_{i,j}^{A^t} = (M_{j,i}^{A})^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

4. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $n > 1$. הוכיחו:

(א) $|adjA| = |A|^{n-1}$

פתרון: נחלק למקרים.
אם $A = 0$, $|A| = 0$, ו$adj(A) = 0$ אז $|adj(A)| = 0$.
אם $A \neq 0$ לא הפיכה, $|A| = 0$. כאשר A לא הפיכה, אז $Aadj(A) = 0$. זה אומר ש$adj(A)$ מחלקת אפס, לכן לא הפיכה, לכן $|adj(A)| = 0$.
אם A הפיכה. $Aadj(A) = |A|I$.
$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A)$.

$$|A|A^{-1} = adj(A)$$

נפעיל דטרמיינטה על שני האגפים. נקבל

$$||A|A^{-1}| = |adj(A)|$$

$$|A|^n|A^{-1}| = |adj(A)|$$

$$|A|^n|A|^{-1} = |adj(A)|$$

$$|A|^{n-1} = |adj(A)|$$

(ב) אם A הפיכה אז $adj\ (adjA) = |A|^{n-2} \cdot A$
פתרון: אנחנו יודעים שאם B מטרציה הפיכה, אז $adj(B) = |B|B^{-1}$.
נתון שA מטריצה הפיכה. אז $adj(A)$ גם הפיכה. (כי הכפל שלהם יוצא מטריצה סקלית שונה מ0, שזה מטריצה הפיכה. ואם כפל של מטריצות הוא הפיך אז כל אחת מהן הפיכה). ולכן גם $adj(adj(A))$ הפיכה. נקבל ש:

$$adj(adj(A)) = |adj(A)|(adj(A))^{-1}$$

$$adj(adj(A)) = |A|^{n-1}(adj(A))^{-1}$$

חישוב עזר: מה זה ההופכית של $adj(A)$?

$$Aadj(A) = |A|I$$

מפה מסיקים ש:

$$adj(A)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$$

נציב בנוסחא האחרונה שהגענו אליה

$$adj(adj(A)) = |A|^{n-1}\frac{1}{|A|}A$$

$$adj(adj(A)) = |A|^{n-2}A$$

5. תהי A מטריצה לא הפיכה.

(א) הוכיחו שאם $rank(A) \leq n-2$, אז $adj(A) = 0$
ניזכר כי הרכיבים ב$adj(A)$ הם ±1 כפול דטרמיננטות של מינורים של A. בשביל שרכיבי המטריצה יהיו 0, הדטרמיננטות של המינורים צריכות להיות 0. כלומר, צריך להתקיים שכל מינור הוא לא הפיך.
ה$rank$ של A קטן שווה ל$n-2$. זה אומר שכל $n-1$ שורות שניקח הן תלויות.
יהי $M^A_{i,j}$ המינור הi,j. זה אומר שלקחנו $n-1$ שורות כלשהן של A ומחקנו מהן איזשהי עמודה. יהיו $v_1,...,v_{n-1}$ ה$n-1$ שורות שהשארנו. אחת מהן היא צירוף של האחרות, כי הן תלויות. גם כשנמחק מכולן איזשהי עמודה, הצירוף עדיין נשאר. לכן המינור לא הפיך (כי השורות שלו תלויות) ולכן הדטרמיננטה שלו היא 0.
זה נכון לכל מינור. אז קיבלנו ש$adj(A) = 0$.

(ב) הוכיחו שאם $rank(A) = n-1$ אז $rank(adj(A)) = 1$

הוכחה:

$$Aadj(A) = |A|I = 0$$

$$C(adj(A)) \subseteq N(A)$$

$$\dim N(A) = 1$$

לפי משפט הדרגה. לכן

$$rank(adj(A)) = \dim C(adj(A)) \leq 1$$

מכיוון ש$rank(A) = n-1$, יש לA מינור הפיך. (באופן כללי, אם $rank(A) = r$, אז יש בתוך A תת מטריצה מגודל $r \times r$ הפיכה).
הסבר: יש $n-1$ שורות בת"ל. נסתכל על המטריצה שמורכבת רק מהשורות שלה. הדרגה שלה היא $n-1$, ולכן יש בה $n-1$ עמודות בת"ל. נבחר את בעמודות האלה, ונקבל מטריצה הפיכה מגודל $n-1 \times n-1$.
לכן $rank(adj(A)) \neq 0$ כי היא לא מטריצת ה0, יש בה לפחות רכיב אחד שונה מ0.
(עבור המינור ההפיך- הדטרמיינטה שלו היא לא 0)

(ג) הסיקו שאם $n \geq 3$ אז $adj(adj(A)) = 0$

פתרון: אם $rank(A) \leq n-2$ אז $adj(A) = 0$ ולכן $adj(adj(A)) = adj(0) = 0$.
אם $rank(A) = n-1$ אז $rank(adj(A)) = 1 \leq n-2$, ולכן מהסעיף הראשון, $adj(adj(A)) = 0$.