<u>פיתרון לתרגיל מספר 2</u>

<u>תשובה 1:</u>

א. הכיוון $V = U \oplus W \Leftarrow$ $\dim U + \dim W = \dim V$. ברור ממשפט המימדים אבל הכיוון השני לא נכון. דוגמא נגדית: $U = W = Span\{(1,0)\}$. $V = R^2$ ברור ש - $\dim U + \dim W = \dim V$ אבל W+U אינו V.

ב. זה תרגיל קלאסי למשפט המימדים.

נשים לב: $U_1 + U_2 = U_1 + U_3 \Rightarrow \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1 + U_2)$

כעת לפי משפט המימדים נקבל

$$\dim(U_1) + \dim(U_3) - \dim(U_1 \cap U_3) = \dim(U_1 + U_3) = \dim(U_1 + U_2)$$

$$= \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

ולכן מהנתון $\dim U_2 < \dim U_3$ נקבל

$0 < \dim(U_3) - \dim(U_2) = \dim(U_1 \cap U_3) - \dim(U_1 \cap U_2)$ ולכן

$\dim(U_1 \cap U_3) > \dim(U_1 \cap U_2)$ משל.

<u>תשובה 2:</u>

א. נובע מלינאריות של T, עבור $w_1, w_2 \in W,\ a \in F$ מתקיים:

$$T|_W(w_1 + aw_2) = T(w_1 + aw_2) = T(w_1) + aT(w_2) = T|_W(w_1) + aT|_W(w_2)$$

ב. $KerT|_W = \{ w \in W : T|_W(w) = 0\} = \{w \in W : T(w) = 0\} =$

$$\{w \in V: w \in W\} \cap \{w \in V : T(w) = 0\} = W \cap KerT$$

$$ImT|_W = \{T|_W(w): w \in W\} = \{T(w): w \in W\} = T[W]$$

ג. לפי משפט המימדים:

$$dimW = \dim(KerT|_W) + \dim(ImT|_W) = \dim(KerT \cap W) + \dim(T[W])$$

<u>תשובה 3:</u>

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 1 & 10 & 9 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5)(2\ 7\ 9\ 8)(4)(6\ 10)$$

לכן $\sigma = (1\ 5)(1\ 3)(2\ 8)(2\ 9)(2\ 7)(6\ 10)$

את שני החילופים הראשונים קיבלנו מהמחזור הראשון את שלושת הבאים מהמחזור השני לפי הטכניקה שלמדנו בכיתה בה לוקחים את האיבר הראשון במחזור כאיבר שמאפשר "חילחול" בחילופים.

קיבלנו, אם כן, מספר זוגי של חילופים לכן התמורה זוגית.

תשובה 4:

$$(4\ 5\ 6)(5\ 6\ 7)(6\ 7\ 1)(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)(3\ 4\ 5)=(1\ 2\ 7)(3)(4)(5)(6)$$

תשובה 5:

ראשית נציין שכל תמורה ב S_n ניתנת להצגה כמספר סופי של מחזורים זרים. שנית נציין שמחזורים זרים מתחלפים תחת הפעולה שהגדרנו בכיתה (כפי שהוכחנו). שלישית, בהינתן מחזור עם k איברים (מחזור מסדר k) סדר התמורה שאותה הוא מייצג היא k. ניתן להמחיש זאת באופן הבא: נסתכל על איבר מסויים , נאמר הראשון משמאל,במחזור $\sigma=(a_1\,a_2\cdots a_k)$ אזי

$$\underbrace{\sigma\cdot\ldots\cdot\sigma}_{k}(a_1)=\underbrace{\sigma\cdot\ldots\cdot\sigma}_{k-1}(\sigma(a_1))=\underbrace{\sigma\cdot\ldots\cdot\sigma}_{k-1}(a_2)=\underbrace{\sigma\cdot\ldots\cdot\sigma}_{k-2}(a_3)=\ldots=\sigma(a_n)=a_1$$

ב S_2 יש רק מחזורים מאורך 2 (הזהות ו-(2 1)) לכן עפ"י הרשום לעיל סדרם הוא לכל היותר 2 . ז"א אין תמורות מסדר 3.

ב S_n : ניקח תמורה כלשהי ב $\sigma\in S_n$. ניתן להציג את σ כמכפלה של מחזורים זרים. עתה, בגלל תכונת החילופיות של מחזורים הזרים , העלאת σ בחזקת k כמו כהעלאת כל אחד מהמחזורים במכפלה בחזקת k. מאחר שאנו דורשים ש $\sigma^3=e$ וש $\sigma^2\neq e$ חייב ליהיות בפירוק מחזורים מסדר(גודל) 3 , בלבד. מספר המחזורים השונים מסדר 3 ב S_n הוא מספר האפשרויות לסידור 3 איברים מתוך קבוצה של n איברים, ללא חזרות, במעגל שהוא

$$2\cdot\binom{n}{3}=2\cdot\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

לכן ב S_3 יש 2 אברים מסדר 3 שהם $(1\ \ 2\ \ 3),(1\ \ 3\ \ 2)$, ב S_4 יש 8 איברים מסדר 3 וב S_5 יש 20. המצב מעט מסתבך ב S_6 שכן יש שם תמורות הניתנות להצגה של שני מחזורים זרים מסדר (מגודל) 3 כ"א .(מצב שאינו קיים במקרים הקודמים שכן הוא מחייב לפחות שישה איברים שונים בקבוצה עליה מתבצעת התמורה).

בשאלה 3 יש פירוק למחזור מסדר 4 מחזור מסדר 3 ומחזור מסדר 2 עמ"נ ששלושתם יהיו הזהות צריך להעלותם בחזקת 12 שהוא המספר הקטן ביותר שמתחלק ב- 3 ב- 4 וב-2 . כל חזקה קטנה יותר לא "תטפל" לפחות במחזור אחד מבינהם.

תשובה 6:

פשוט להראות שמדובר באותה העתקה מ- $\{1,\ldots,n\}$ לעצמה.(דהיינו שהתמונות מתלכדות).