מד"ר - הרצאה 3

7 באוגוסט 2011

מערכת של מד"ר מסדר ראשון

מערכת של מד"ר מסדר ראשון ניתנת בצורה:

$$\overrightarrow{F}=\left(x,\,\overrightarrow{y},\,\overrightarrow{y'}\right)$$

כאשר $\overrightarrow{y}$ הוא וקטור של n פונק' לא ידועות של x ו$\overrightarrow{F}$ הוא וקטור במימד n של פונק' ב$2n+1$ משתנים.
בצורה נורמלית הצורה היא

$$\overrightarrow{y}\,'=\overrightarrow{f}\,(x,\,\overrightarrow{y})$$

למשל:

$$\begin{aligned}y_1^{'}+\sin x+y_1y_2\cdot x^2 &= 0\\ \frac{y_1^{'}}{y_2}+\frac{y_2^{'}}{y_1}+\cos x &= 0\end{aligned}$$

בעיית קושי עבור מערכת היא מהצורה:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}\left(x,\,\overrightarrow{y},\,\overrightarrow{y}\,'\right) &= 0\\ \overrightarrow{y}\,(x_0) &= \overrightarrow{y_0}\end{aligned}$$

משפט - הקשר בין מד"ר מסדר גבוה למערכת מד"ר

מד"ר מסדר n (נורמלית/לינארית/הומוגנית) שקולה למערכת של n מד"ר מסדר ראשון (נורמלית/לינארית/הומוגנית).
אם למד"ר מסדר גבוה נתונים גם תנאי התחלה עבור:

$$y\,(x_0)\,,\,y^{'}\,(x_0)\,,\,...,\,y^{(n-1)}\,(x_0)$$

זה שקול לבעיית קושי עבור מערכת המד"ר.

הוכחה

נגדיר

$$y_1=y^{'}\,,\,y_2=y^{''}\,,\,...,\,y_{n-1}=y^{(n-1)}$$

המד"ר התחילה בצורה

$$F\left(x,\,y,\,y^{'},\,...,\,y^{(n-1)},\,y^{(n)}\right)=0$$

ועכשיו נכתוב

$$F\left(x,\,y,\,y_{1},\,...,\,y_{n-1},\,y_{n-1}^{'}\right)=0$$

וכן נוסיף את המשוואות:

$$\begin{cases} y^{'} & = & y_{1}\\ y_{1}^{'} & = & y_{2}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ y_{n-2}^{'} & = & y_{n-1} \end{cases}$$

המשוואות האלה הן נורמליות לינאריות והומוגניות לכן אם F נורמלית/לינארית/הומוגנית גם המערכת תהיה נורמלית/לינארית/הומוגנית.
תנאי ההתחלה שבמשפט מתורגמים לתנאי התחלה עבור $y,\,y_{1},\,..,\,y_{n-1}$ בנק' x_{0} שהם תנאי קושי.

דוגמה

$$y^{(3)}+x^{2}y^{''}+\sin\left(x\right)\cdot y=0$$

נסמן:

$$\begin{aligned} z & = & y^{'}\\ w & = & y^{''}=z^{'} \end{aligned}$$

אזי המערכת היא:

$$\begin{aligned} w^{'}+x^{2}w+\sin\left(x\right)\cdot y & = & 0\\ z & = & y^{'}\\ w & = & z^{'} \end{aligned}$$

משפט הקיום והיחידות עבור מערכת מד"ר

משפט הקיום והיחידות עבור מערכת מד"ר מהצורה:

$$\overrightarrow{y}^{\,'}=\overrightarrow{f}\left(x,\,\overrightarrow{y}\right)$$

תהי $\overrightarrow{f}\left(x,\,\overrightarrow{y}\right)$ פונק' וקטורית רציפה ומקיימת תנאי ליפשיץ ב$\overrightarrow{y}$ בתיבה

$$B=\left\{ \left|x-x_{0}\right|\leq a,\,\left|y_{k}-y_{k_{0}}\right|\leq b,\,k=1,\,...,\,n\right\}$$

אזי למערכת המד"ר $\overrightarrow{y}^{\,'}=\overrightarrow{f}\left(x,\,\overrightarrow{y}\right)$ **יש פתרון אחד ויחיד ברווח** $\left|x-x_{0}\right|<a^{'}$ כאשר:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{y}\left(x_{0}\right) & = & \overrightarrow{y_{0}}\\ a^{'} & = & \min\left(a,\,\frac{b_{1}}{M_{1}},\,...,\,\frac{b_{n}}{M_{n}}\right) \end{aligned}$$

כאשר

$$M_k=\max_{(x,\,y)\in B}\left|f_k\left(x,\,\overrightarrow{y}\right)\right|$$

הוכחה

נגדיר סדרת פונק' וקטוריות

$$\left\{\overrightarrow{\phi_m}\left(x\right)\right\}_{m=0}^{\infty}$$

באופן הבא:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\phi_0}\left(x\right) &= \overrightarrow{y_0}\\ \overrightarrow{\phi_m}\left(x\right) &= \overrightarrow{y_0}+\int\limits_{x_0}^{x}f\left(t,\,\overrightarrow{\phi_{m-1}}\left(t\right)\right)dt\end{aligned}$$

שיטה זו נקראת שיטת פיקרד, שיטה לפתרון מד"ר ע"י קירוב של פונק'. גבול הסדרה הוא הפתרון של המד"ר.
אזי עבור $|x-x_0|\le a^{'}$ מתקיים:

1. הפונק' $\phi_m\left(x\right)$ מוגדרות היטב, כלומר לכל m:

$$\left|\phi_{m,\,k}\left(x\right)-y_{0,\,k}\right|\le b_k$$

נוכיח באינדוקציה על m.
עבור $m=0$ בוודאי נכון, כיוון ש $\phi_{0,\,k}=y_{0,\,k}$.
נניח נכונות עבור $m-1$, אזי:

$$\begin{aligned}\left|\phi_{m,\,k}-y_{0,\,k}\right| &= \left|\int\limits_{x_0\int}^{x}f_k\left(t,\,\overrightarrow{\phi_{m-1}}\left(t\right)\right)dt\right|\\ &\le \left|x-x_0\right|\cdot M_k\\ &\le a^{'}M_k\le b_k\end{aligned}$$

לכן $\overrightarrow{\phi_m}\left(x\right)$ מוגדרות היטב בתיבה וכן רציפות עבור $|x-x_0|\le a^{'}$ ע"פ ההגדרה.

2. סדרת הפונק' $\left\{\phi_m\left(x\right)\right\}_{m=0}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ברווח $|x-x_0|\le a^{'}$ (נוכיח רכיב רכיב).
ניתן לכתוב

$$\phi_{N,\,k}\left(x\right)=\sum_{m=1}^{N}\left[\phi_{m,\,k}\left(x\right)-\phi_{m-1,\,k}\left(x\right)\right]+\phi_{0,\,k}\left(x\right)$$

$\phi_0\left(x\right)$ קבועה ולכן הטור מתכנס במ"ש אם הסכום מתכנס במ"ש.
מתקיים:

$$\begin{aligned}\left|\phi_{m+1,\,k}\left(x\right)-\phi_{m,\,k}\left(x\right)\right| &= \left|\int\limits_{x_0}^{x}\left[f_k\left(t,\,\phi_m\left(t\right)\right)-f_k\left(t,\,\phi_{m-1}\left(t\right)\right)\right]dt\right|\\ &\le \int\limits_{x_0}^{x}\left|f_k\left(t,\,\phi_m\left(t\right)\right)-f_k\left(t,\,\phi_{m-1}\left(t\right)\right)\right|dt\end{aligned}$$

נניח $x \geq x_0$. נסמן:

$$\delta_m(x) = \sum_{k=1}^{n} \left|\phi_{m,\,k}(x) - \phi_{m-1,\,k}(x)\right|$$

אזי לפי תנאי ליפשיץ:

$$\left|\phi_{m+1,\,k}(x) - \phi_{m,\,k}(x)\right| \leq K \int_{x_0}^{x} \delta_m(t)\,dt$$

נסכום על k ונקבל:

$$\delta_{m+1}(x) \leq n \cdot K \int_{x_0}^{x} \delta_m(t)\,dt$$

נסמן:

$$\begin{aligned} K_0 &= nK \\ H &= \max_{1 \leq i \leq n} M_i \\ H_0 &= nH \end{aligned}$$

אז נוכיח שלכל m מתקיים:

$$\delta_m(x) \leq H_0 \cdot K_0^{m-1} \cdot \frac{(x-x_0)^m}{m!}$$

נוכיח באינדוקציה על m.
עבור $m=1$, מהעובדה:

$$\begin{aligned} \left|\phi_{1,\,k}(x) - \phi_{0,\,k}(x)\right| &\leq \int_{x_0}^{x} f_k\left(t,\,\overrightarrow{y_0}\right)dt \\ &\leq H \cdot (x-x_0) \end{aligned}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} \delta_1(x) &= \sum_{k=1}^{n} \left|\phi_{1,\,k}(x) - \phi_{0,\,k}(x)\right| \\ &\leq n \cdot H \cdot (x-x_0) = H_0(x-x_0) \end{aligned}$$

נניח נכונות עבור m, אזי

$$\begin{aligned} \delta_{m+1}(x) &\leq K_0 \int_{x_0}^{x} \delta_m(t)\,dt \\ &\leq K_0 \cdot \int_{x_0}^{x} H_0 K_0^{m-1} \cdot \frac{(t-x_0)^m}{m!}dt \\ &\leq H_0 K_0^m \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \end{aligned}$$

כלומר

$$\delta_m(x)=\sum_{k=1}^{n}\left|\phi_{m,\,k}(x)-\phi_{m-1,\,k}(x)\right|\leq\frac{H_0\left(K_0a^{'}\right)^m}{K_0\cdot m!}$$

ולכן לכל k:

$$\left|\phi_{m,\,k}(x)-\phi_{m-1,\,k}(x)\right|\leq\frac{H_0\left(K_0\cdot a^{'}\right)^m}{K_0m!}$$

הטור

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(K_0a^{'}\right)^m}{m!}$$

מתכנס ל $e^{K_0a^{'}}-1$ ולכן סדרת הפונק' $\{\phi_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש עבור $|x-x_0|\leq a^{'}$ לפונק' $\phi_x=\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)$.

3. $\phi(x)$ פתרון של מערכת המד"ר.
לפי ההגדרה מתקיים

$$\overrightarrow{\phi_m}(x)=\overrightarrow{y_0}+\int_{x_0}^{x}f\left(t,\,\overrightarrow{\phi_{m-1}}(t)\right)dt$$

ניקח גבול $m\to\infty$ ונקבל:

$$\phi(x)=\overrightarrow{y_0}+\int_{x_0}^{x}f(t,\,\phi(t))\,dt$$

לפי גזירות האינטגרל נקבל:

$$\overrightarrow{\phi}^{\,'}(x)=\overrightarrow{f}\left(x,\,\overrightarrow{\phi}(x)\right)$$

כלומר $y=\phi(x)$ פותר את המד"ר.

4. הפתרון יחיד.
נניח $\phi(x)\,,\,\psi(x)$ שני פתרונות ברווח $|x-x_0|\leq a^{'}$ המקיימים:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\phi}^{\,'}(x)&=\overrightarrow{f}\left(x,\,\overrightarrow{\phi}(x)\right)\\\overrightarrow{\psi}^{\,'}(x)&=\overrightarrow{f}\left(x,\,\overrightarrow{\psi}(x)\right)\\\overrightarrow{\phi}(x_0)&=\overrightarrow{\psi}(x_0)=\overrightarrow{y_0}\end{aligned}$$

ניתן לכתוב:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\phi}(x)&=\overrightarrow{y_0}+\int\overrightarrow{f}\left(t,\,\overrightarrow{\phi}(t)\right)dt\\\overrightarrow{\psi}(x)&=\overrightarrow{y_0}+\int\overrightarrow{f}\left(t,\,\overrightarrow{\psi}(t)\right)dt\end{aligned}$$

נקבל:

$$\begin{aligned}\left|\phi_i(x)-\psi_i(x)\right| &\leq \int\limits_{x_0}^{x}\left|f_i\left(t,\ \overrightarrow{\phi}(t)\right)-f_i\left(t,\ \overrightarrow{\psi}(t)\right)\right|dt\\ &\leq \int\limits_{x_0}^{x}K\sum_{k=1}^{n}\left|\phi_k(t)-\psi_k(t)\right|\end{aligned}$$

נסכום על i ונקבל:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\phi_i(x)-\psi_i(x)\right|\leq nK\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_0}^{x}\left|\phi_k(t)-\psi_k(t)\right|dt$$

נסמן

$$\delta(x)=\sum_{i=1}^{n}\left|\phi_i(x)-\psi_i(x)\right|$$

ונקבל:

$$0\leq\delta(x)\leq K_0\int\limits_{x_0}^{x}\delta(t)\,dt$$

ידוע לנו שמתקיים:

$$\delta(x)\leq H_0$$

הטכיח באינדוקציה שלכל m מתקיים

$$\delta(x)\leq H_0K_0^m\frac{|x-x_0|^m}{m!}$$

עבור $m=0$ זה מיידי, $\delta(x)\leq H_0$.
נניח נכונות עבור m, אזי עבור $x\geq x_0$:

$$\begin{aligned}\delta(x) &\leq K_0\int\limits_{x_0}^{x}\delta(t)\,dt\\ &\leq K_0\int\limits_{x_0}^{x}H_0K_0^m\cdot\frac{(t-x_0)^m}{m!}dt\\ &= H_0K_0^{m+1}\cdot\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}\end{aligned}$$

אבל

$$\lim_{m\to\infty}H_0K_0^m\cdot\frac{(x-x_0)^m}{m!}=0$$

ולכן:

$$0\leq\delta(x)\leq 0$$

כלומר $\delta(x)=0$ ולכן $\phi=\psi$, מש"ל.

מד"ר סתומות מסדר 1

מד"ר סתומות מסדר 1 הן מד"ר מהצורה

$$F\left(x,\,y,\,,\,y^{'}\right)=0$$

שלא ניתן להעביר אותן לצורה $y^{'}=f\left(x,\,y\right)$.
באופן כללי ניתן לעבור לצורה

$$\begin{aligned}y^{'} &= p\\ F\left(x,\,y,\,p\right) &= 0\end{aligned}$$

נתסכל על מספר מקרים:

מקרה א' - משוואה מסדר 1 ממעלה n

$$\left(y^{'}\right)^{n}+p_{1}\left(x,\,y\right)\cdot\left(y^{'}\right)^{n-1}+...+p_{n-1}\left(x,\,y\right)y^{'}+p_{n}\left(x,\,y\right)=0$$

לעתים ניתן לחלץ n פתרונות של $y^{'}$, כלומר לקבל:

$$\left(y^{'}-f_{1}\left(x,\,y\right)\right)\left(y^{'}-f_{2}\left(x,\,y\right)\right)\cdot...\cdot\left(y^{'}-f_{n}\left(x,\,y\right)\right)=0$$

במקרה כזה יהיו n פתרונות שונים של המשוואות

$$y^{'}-f_{i}\left(x,\,y\right)=0$$

דוגמה

$$\left(y^{'}\right)^{2}-\frac{xy}{a^{2}}=0$$

ניתן לכתוב את המשוואה כך:

$$\begin{aligned}\left(y^{'}-\frac{\sqrt{xy}}{a}\right)\left(y^{'}+\frac{\sqrt{xy}}{a}\right) &= 0\\ y^{'} &= \pm\frac{\sqrt{xy}}{a}\end{aligned}$$

והפתרונות הם:

$$\sqrt{y}\pm\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3a}=c$$

מקרה ב׳ - כאשר x לא מופיע

$$F\left(y,\,y^{'}\right)=0$$

נציב $p=y^{'}=\frac{dy}{dx}$.

$$F\left(y,\,p\right)=0$$

נבצע אינטגרציה על המשוואה $\frac{y^{'}}{p}=1$:

$$\begin{aligned}\int\frac{dy}{p} &= \int dx\\ x &= \int\frac{dy}{p}+c\end{aligned}$$

את y לעתים אפשר לבטא באמצעות p בעזרת המשוואה $F\left(y,\,p\right)=0$ אז נקבל

$$y=\phi\left(p\right)$$

נקבל ע"י אינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned}x &= c+\int\frac{dy}{p}\\ &= c+\frac{y}{p}+\int\frac{y}{p^{2}}dp\\ &= c+\frac{\phi\left(p\right)}{p}+\int\frac{\phi\left(p\right)dp}{p^{2}}\end{aligned}$$

קיבלנו ביטוי של x ושל y באמצעות p.

דוגמה

$$y=\left(y^{'}\right)^{2}+2\left(y^{'}\right)^{3}$$

נגדיר

$$\begin{aligned}y^{'} &= p\\ y &= p^{2}+2p^{3}\end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned}x &= c+\frac{y}{p}+\int\frac{ydp}{p^{2}}\\ &= c+\frac{p^{2}+2p^{3}}{p}+\int\frac{p^{2}+2p^{3}}{p^{2}}dp\\ &= c+p+2p^{2}+\int\left(1+2p\right)dp\\ &= c+p+2p^{2}+p+p^{2}\\ &= c+2p+3p^{2}\end{aligned}$$

קיבלנו את הפתרון:

$$\begin{cases}x &= c+2p+3p^{2}\\ y &= p^{2}+2p^{3}\end{cases}$$

מקרה ג׳ - כאשר y לא מופיע

$$F\left(x,\,y^{'}\right)=0$$

נניח שאנחנו יכולים לחלץ את x כלומר

$$x=\varphi\left(y^{'}\right)$$

נציב $y^{'}=p$ אז

$$\begin{aligned}
x &= \varphi\left(p\right)\\
y^{'} &= p\\
dy &= pdx
\end{aligned}$$

נעשה אינטגרציה ונקבל

$$\begin{aligned}
y &= \int pdx+c\\
&\begin{bmatrix}u=p,\,du=dp\\ dv=dx,\,v=x\end{bmatrix}\\
y &= c+px-\int xdp\\
&= c+p\cdot\varphi\left(p\right)-\int\varphi\left(p\right)dp
\end{aligned}$$

דוגמה

$$\begin{aligned}
x &= y^{'}\cdot\sin\left(y^{'}\right)\\
p &= y^{'}\\
x &= p\sin p\\
y &= c+p^{2}\sin p+\int p\sin pdp\\
&= c+p^{2}\sin p+p\cos p-\int\cos pdp\\
&= c+p^{2}\sin p+p\cos p-\sin p
\end{aligned}$$

לכן הפיתרון הוא:

$$\begin{aligned}
x &= p\sin p\\
y &= c+p^{2}\sin p+p\cos p-\sin p
\end{aligned}$$

מקרה 4 - מופיעים x או y אבל סתומות ביחס לx או y

$$F\left(y,y^{'}\right)=0$$

או

$$F\left(x,y^{'}\right)=0$$

נגדיר שוב

$$y^{'}=p$$

נתחיל מהמקרה

$$F\left(y,p\right)=0$$

נציב $y=\varphi\left(t\right)$.

$$F\left(\varphi\left(t\right),p\right)=0$$

מכאן נוציא את p,

$$p=\psi\left(t\right)$$

לפי ההצבה שלנו

$$\begin{aligned}
y^{'} &= p\\
dy &= \psi\left(t\right)dx\\
dy &= \varphi^{'}\left(t\right)dt\\
\psi\left(t\right)dx &= \varphi^{'}\left(t\right)dt\\
dx &= \frac{\varphi^{'}\left(t\right)}{\psi\left(t\right)}dt\\
x &= \int\frac{\varphi^{'}\left(t\right)}{\psi\left(t\right)}dt+c\\
y &= \varphi\left(t\right)
\end{aligned}$$

וזה הפתרון.

דוגמה

$$\begin{aligned}
y &= a\sqrt{1+\left(y'\right)^{2}}\\
y^{'} &= p
\end{aligned}$$

נציב

$$\begin{aligned}
y^{'} &= \sinh\left(t\right)=p\\
y &= a\cosh\left(t\right)\\
x &= \int\frac{a\sinh\left(t\right)}{\sinh\left(t\right)}dt+c\\
 &= at+c
\end{aligned}$$

אז קיבלנו שהפתרון הוא:

$$\begin{aligned} x &= at+c \\ y &= a\cosh t \end{aligned}$$

המשך מקרה 4

כנ"ל אם

$$F\left(x,y^{'}\right)=0$$

נציב $p=y^{'}$, $x=\varphi\left(t\right)$ אזי

$$F\left(\varphi\left(t\right),p\right)=0$$

נקבל

$$p=\psi\left(t\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned} dx &= \varphi^{'}\left(t\right)dt \\ \frac{dy}{dx} &= \psi\left(t\right) \\ dx &= \frac{dy}{\psi\left(t\right)} \\ \varphi^{'}\left(t\right)dt &= \frac{dy}{\psi\left(t\right)} \\ y &= c+\int\psi\left(t\right)\varphi^{'}\left(t\right)dt \end{aligned}$$

והפתרון הוא:

$$\begin{aligned} x &= \varphi\left(t\right) \\ y &= c+\int\psi\left(t\right)\varphi^{'}\left(t\right)dt \end{aligned}$$

משוואת לגרנז'

$$\begin{aligned} y &= \varphi\left(y^{'}\right)\cdot x+\psi\left(y^{'}\right) \\ \varphi\left(y^{'}\right) &\neq y^{'} \end{aligned}$$

נציב $p=y^{'}$. נקבל

$$y=\varphi\left(p\right)x+\psi\left(y^{'}\right)$$

נגזור לפי x:

$$\begin{aligned} y^{'} &= \varphi\left(p\right)+\frac{d\varphi}{dp}\cdot x\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{d\psi}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}\\ p &= \varphi\left(p\right)+\left[xP_{p}^{'}\left(p\right)+\psi_{p}^{'}\left(p\right)\right]\frac{dp}{dx}\end{aligned}$$

נכפיל ב$\frac{dx}{dp}$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dp}\left(p-\varphi\left(p\right)\right) &= x\varphi_{p}^{'}\left(p\right)+\psi_{p}^{'}\left(p\right)\\ \frac{dx}{dp}-\frac{\varphi_{p}^{'}\left(p\right)}{p-\varphi\left(p\right)}\cdot x &= \frac{\psi_{p}^{'}\left(p\right)}{p-\varphi\left(p\right)}\end{aligned}$$

קיבלנו מד"ר לינארית של x כפונק' של p שאנו יודעים לפתור, הפתרון:

$$\begin{aligned} x &= e^{\int\frac{\varphi^{'}(p)}{p-\varphi(p)}dp}\cdot\left[c+\int\frac{\psi_{p}^{'}\left(p\right)}{p-\varphi\left(p\right)}e^{-\int\frac{\varphi^{'}(p)}{p-\varphi(p)}dp}dp\right]\\ y &= \varphi\left(p\right)x\left(p\right)+\psi\left(p\right)\end{aligned}$$

הערה

חילקנו ב$p-\varphi\left(p\right)$, כלומר הנחנו שמתקיים

$$p-\varphi\left(p\right)\neq0$$

אם $p_{i}-\varphi\left(p_{i}\right)=0$ שורשים של הביטוי אז $y=p_{i}x+\psi\left(p_{i}\right)$ גם פתרון.

דוגמה

$$\begin{aligned} y &= x\cdot\left(y^{'}\right)^{2}+\left(y^{'}\right)^{2}\\ y^{'} &= p\\ y &= xp^{2}+p^{2}\\ p=y^{'} &= p^{2}+2xp\cdot\frac{dp}{dx}+2p\frac{dp}{dx}\\ p-p^{2} &= 2p\left(x+1\right)\frac{dp}{dx}\\ 1-p &= 2\left(x+1\right)\frac{dp}{dx}\\ \frac{dx}{x+1} &= 2\frac{dp}{1-p}\\ \ln\left|x+1\right| &= -2\ln\left|p-1\right|+c\\ x+1 &= \frac{c}{\left(p-1\right)^{2}}\end{aligned}$$

הפתרון הוא:

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{(p-1)^2}-1 \\ y &= p^2(x+1)=\frac{cp^2}{(p-1)^2} \end{aligned}$$

חילקנו בp וב$p-1$ לכן גם הפונק' הבאות הן פתרון:

$$\begin{aligned} y &= x+1 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

משוואת קלרו

$$y=y^{'}x+\psi\left(y^{'}\right)$$

נציב

$$\begin{aligned} y^{'} &= p \\ y &= xp+\psi(p) \end{aligned}$$

נגזור בx:

$$\begin{aligned} p &= p+x\frac{dp}{dx}+\psi_p^{'}(p)\frac{dp}{dx} \\ 0 &= \frac{dp}{dx}\left(x+\psi_p^{'}(p)\right) \end{aligned}$$

יש לנו שני פתרונות. הראשון:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= 0 \\ p &= c \\ y &= xc+\psi(c) \end{aligned}$$

הפתרון השני (פתרון מיוחד):

$$\begin{aligned} x &= -\psi_p^{'}(p) \\ y &= -p\psi^{'}(p)+\psi(p) \end{aligned}$$

דוגמה

$$y=xy^{'}+\sin\left(y^{'}\right)$$

משפחת הפתרונות היא

$$y=xc+\sin c$$

והפתרון המיוחד הוא

$$\begin{cases} x & = & -\cos p \\ y & = & -p\cos p+\sin p \end{cases}$$

אם רוצים אפשר למצוא את p באמצעות x ולהגיע לפתרון לא פרמטרי:

$$y=x\arccos\left(-x\right)+\sqrt{1-x^{2}}$$

דוגמה לפתרון בשיטת פיקרד

$$\begin{aligned} y^{'} &= y \\ y\left(0\right) &= y_{0} \end{aligned}$$

נגדיר:

$$\begin{aligned} \varphi_{0}\left(x\right) &= y_{0} \\ \varphi_{1}\left(x\right) &= y_{0}+\int\limits_{0}^{x}\varphi_{0}\left(t\right)dt \\ &= y_{0}+xy_{0} \\ \varphi_{2}\left(x\right) &= y_{0}+\int\limits_{0}^{x}\left(y_{0}+y_{0}t\right)dt \\ &= y_{0}+y_{0}x+y_{0}\frac{x^{2}}{2} \end{aligned}$$

נמשיך ונקבל (באינדוקציה):

$$\varphi_{n}=y_{0}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k}}{k!}$$

ולכן נקבל

$$\varphi=y_{0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{k!}=y_{0}e^{x}$$