שאלון בחינה בקורס: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (89-218)
סמסטר ב; מועד א. תשע"א
שם המרצה: ד"ר שחר נבו.
משך הבחינה $2\frac{3}{4}$ **שעות.**

<u>ללא חומר עזר, דף נוסחאות מצורף</u>

<u>ענה על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. נמק תשובותיך.</u>

1. א. חשב $\ln 7$ לפי 3 איברים ראשונים שונים מאפס של $\ln\frac{1+x}{1-x}$. מצא הערכה לשגיאה.

   ב.גרףהפרבולה $f(x)=x^2$, $0\le x\le 1$ מסתובב סביב ציר y. מצא שטח פנים של גוף הסיבוב שנוצר.

2. א. מצא האינטגרל הלא מסויים $\int\frac{\sin(\ln x)}{x}dx$.

   ב.גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x^2+1}$, $0\le x\le 1$ מסתובב סביב ציר x. מצא נפח גוף הסיבוב שנוצר.

3. א. מצא רדיוס ההתכנסות R של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$. בדוק התכנסות ב $x=\pm R$.

   ב. האם קיים האינטגרל הלא אמיתי $\int_1^{\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

4. פתור באופן כללי את מערכת המשוואות הדיפרנציאלית $\begin{cases} y_1'=3y_1-y_2 \\ y_2'=4y_1-y_2 \end{cases}$ מצא פתרון $\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

   המקיים $\overrightarrow{y(0)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. א. פתור את המד"ר $xy'-2y=2x^4$ עם תנאי התחלה $y(1)=1$.

   ב. פתור את המד"ר $y'x+y=y^2$ עם תנאי התחלה $y(1)=\frac{1}{2}$.

6. א. מצא האינטגרל הלא מסויים $\int x^3\ln x dx$

   ב. חשב e^A באשר $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ רמז: עדיף בלי למצוא את צורת ז'ורדן של A.

<u>בהצלחה!</u>

פתרון

שאלה 1

א. חשב $\ln 7$ לפי 3 איברים ראשונים שונים מאפס של $\ln\frac{1+x}{1-x}$. מצא הערכה לשגיאה.

ב.גרףהפרבולה $f(x)=x^2$, $0\le x\le 1$ מסתובב סביב ציר y . מצא שטח פנים של גוף הסיבוב שנוצר.

פתרון

א. נחשב את $f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$ כאשר $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

$$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}\Rightarrow f(0)=0$$

$$f'(x)=\frac{2}{1-x^2}\Rightarrow f'(0)=2$$

$$f''(x)=\frac{4x}{\left(1-x^2\right)^2}\Rightarrow f''(0)=0$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{12x^2+4}{\left(1-x^2\right)^3}\Rightarrow f^{(3)}(0)=4$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{48x^3+48x}{\left(1-x^2\right)^4}\Rightarrow f^{(4)}(0)=0$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{-144x^4+480x^2+48}{\left(1-x^2\right)^5}\Rightarrow f^{(5)}(0)=48$$

נקבל שפולינום טיילור הוא $p_4(x)=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5$.

נפתור את המשוואה $\frac{1+x}{1-x}=7$ ונקבל $x=\frac{3}{4}$ ולכן $\ln 7\approx 2\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3+\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5\approx 1.876$.

ב. נחשב את שטח הפנים

$$S=2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{\pi}{6}\cdot\left[\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi .$$

שאלה 2

א. מצא האינטגרל הלא מסויים $\int\frac{\sin(\ln x)}{x}dx$.

ב.גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x^2+1}$, $0\le x\le 1$ מסתובב סביב ציר x . מצא נפח גוף הסיבוב שנוצר.

פתרון

א. נציב $t=\ln x \Leftarrow dt=\frac{dx}{x}$. $\int\sin t\,dt=-\cos t=-\cos(\ln x)$.

ב. $\pi\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx=\pi\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right]_0^1=\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$.

שאלה 3

א. מצא רדיוס ההתכנסות R של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$. בדוק התכנסות ב $x=\pm R$.

ב. האם קיים האינטגרל הלא אמיתי $\int_1^{\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

פתרון

א. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$ ולכן $R=1$. אם $x=1$ נקבל את הטור המתבדר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

אם $x=-1$ נקבל את הטור המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

ב. לכל $x\in[1,\infty)$ נקבל ש $\frac{\pi}{4}\le\arctan x<\frac{\pi}{2}$ ולכן ניתן להשתמש במבחן ההשואה הראשון.

$\frac{\arctan x}{x^2}\le\frac{\pi}{2x^2}$ לכל $x\in[1,\infty)$

מכיוון ש $\int_1^{\infty}\frac{\pi}{2x^2}dx$ מתכנס נקבל שהאינטגרל $\int_1^{\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$ קיים.

שאלה 4

פתורבאופן כללי את מערכת המשוואות הדיפרנציאלית $\begin{cases} y_1'=3y_1-y_2 \\ y_2'=4y_1-y_2 \end{cases}$ מצא פתרון $\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ המקיים

$\overrightarrow{y(0)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

פתרון

$\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 \\ -4 & \lambda+1 \end{vmatrix}=0\Leftarrow(\lambda-3)(\lambda+1)+4=0\Leftarrow\lambda^2-2\lambda+1=0\Leftarrow\lambda=1$.

נקבל ש $y_1=c_1e^x+c_2xe^x\Leftarrow y_1'=c_1e^x+c_2e^x+c_2xe^x$ נציב במשוואה הראשונה ונקבל

$c_1e^x+c_2e^x+c_2xe^x=3c_1e^x+3c_2xe^x-y_2\Leftarrow y_2=2c_1e^x-c_2e^x+2c_2xe^x$.

נתון ש $\overrightarrow{y(0)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ולכן $\begin{matrix} c_1=1 \\ 2\cdot1-c_2=2\Rightarrow c_2=0 \end{matrix}$ והפתרון הוא $y_1=e^x, y_2=2e^x$.

שאלה 5

א. פתור את המד"ר $xy'-2y=2x^4$ עם תנאי התחלה $y(1)=1$.

ב. פתור את המד"ר $y'x+y=y^2$ עם תנאי התחלה $y(1)=\frac{1}{2}$.

פתרון שאלה 5

א. נפתור את המשוואה $y'-\frac{2}{x}y=2x^3$. תחילה נפתור את המשוואה ההומוגנית $y'-\frac{2}{x}y=0$.

$y=ce^{\int \frac{2}{x}dx} \Leftarrow y=cx^2$. פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית הוא $y=x^4$ ולכן הפתרון הכללי של המשוואה הלא הומוגנית הוא $y=cx^2+x^4$ נתון בנוסף ש $y(1)=1$ ולכן $c=0$ והפתרון הוא $y=x^4$.

ב. נשים לב שמדובר במשוואת ברנולי. נחלק ב xy^2 ונקבל $\frac{1}{x}=\frac{1}{xy}+\frac{y'}{y^2}$ נציב $t=\frac{1}{y} \Rightarrow t'=-\frac{y'}{y^2}$.

$\frac{1}{x}=\frac{t}{x}+t'- \Leftarrow t'-\frac{t}{x}=-\frac{1}{x}$ נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית $t'-\frac{t}{x}=-\frac{1}{x}$

$t=cx \Leftarrow t=ce^{\int \frac{1}{x}dx}$ הפתרון הפרטי של המשוואה הלא הומוגנית הוא $t=1$.

הפתרון הכללי של המשוואה הלא הומוגנית הוא $t=cx+1 \Rightarrow y=\frac{1}{cx+1}$. נתון בנוסף ש $y(1)=\frac{1}{2}$

ולכן הפתרון הוא $y=\frac{1}{x+1}$.

<u>שאלה 6</u>

א. מצא האינטגרל הלא מסויים $\int x^3 \ln x dx$

ב. חשב e^A באשר $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ רמז: עדיף בלי למצוא את צורת ז'ורדן של A .

<u>פתרון שאלה 6</u>

1. חשב $\int x^3 \ln x dx$.

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$u=\ln x \quad v=\frac{x^4}{4}$

$u'=\frac{1}{x} \quad v'=x^3$

$$\int x^3 \ln x dx=\frac{x^4 \ln x}{4}-\int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^4 \ln x}{4}-\int \frac{x^3}{4}dx=\frac{x^4 \ln x}{4}-\frac{x^4}{16}$$.

ב. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. מכיוון שהמטריצות $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ לא מתחלפות ז"א

$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ אז לא מתקיים בהכרח השוויון $e^{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}=e^{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}\cdot e^{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}$.

יש לחשב את $e^{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}}$ בדרך אחרת.

נשים לב ש $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ ולכן מתקיים $A^n=A$ לכל $1<n$ (n מספר טבעי).

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e&e-1\\0&1\end{pmatrix}$$