פתרון מועד א

4 במרץ 2017

1. בשאלה זו $\oplus$ מסמן את הקשר XOR

(א) הראו ש $\{\oplus, \to\}$ היא קבוצת קשרים שלמה

(ב) כיתבו את הפסוק $p \leftrightarrow q$ בעזרת הקשרים $\oplus, \to$ בלבד

(ג) האם הקבוצה $\{\to, \leftrightarrow, \wedge, \vee\}$ היא קבוצת קשרים שלמה? הוכיחו את טענתכם!

פתרון:

i. נשים לב ש $p \oplus p \equiv f$ כאשר f מסמן סתירה, ושמתקיים $p \to f \equiv \neg p$.
ראינו בכיתה ש $\{\neg, \to\}$ היא קבוצת קשרים שלמה ולכן סיימנו

ii. הדרך הקצרה: כיוון ש $p \leftrightarrow q \equiv \neg(p \oplus q)$ ומסעיף (א) מתקבל

$$\boxed{p \leftrightarrow q \equiv (p \oplus q) \to (p \oplus p)}$$

הדרך הארוכה: כותבים את הפסוק בצורת DNF ומקבלים:

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

מזהויות דה־מורגן נובע $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$ ועל כן הפסוק לעיל ניתן לכתיבה כך:

$$\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(\neg\neg p \vee \neg\neg q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee q)$$

ראינו בכיתה ש $p \to q \equiv \neg p \vee q$, ומכאן גם $\neg p \to q \equiv p \vee q$ ולכן ניתן לכתוב את הפסוק שלנו כך

$$\begin{aligned}&\neg(p \to \neg q) \vee \neg(\neg p \to q) \equiv \\ \equiv&\neg\neg(p \to \neg q) \to \neg(\neg p \to q)) \equiv \\ \equiv&(p \to \neg q) \to \neg(\neg p \to q)\end{aligned}$$

לסיום צריך להחליף כל שלילה בגרירת סתירה לפי סעיף (א). הפסוק המתקבל:

$$\boxed{p \leftrightarrow q \equiv (p \to (q \to (p \oplus p))) \to (((p \to (p \oplus p)) \to q) \to (p \oplus p))}$$

iii. נראה שאין דרך לבטא את $\neg p$ באינדוקציה על מספר הקשרים בפסוק. הפסוק האטומי היחיד העומד לרשותנו הוא p, אך זה לא מספיק כמקרה בסיס. אם יש קשר אחד אז $p \wedge p \equiv p \vee p \equiv p$ אך $p \to p \equiv p \leftrightarrow p \equiv t$ כאשר t מסמן טאוטולוגיה. כעת נראה באינדוקציה שבעזרת p, t והקשרים לעיל אין דרך לבטא יותר מאשר p, t. ואכן זה המצב (תשע בדיקות בנוסף לארבע שכבר עשינו).

2. הוכיחו או הפריכו: לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים $A \triangle B \triangle C = \overline{\overline{A} \triangle \overline{B} \triangle \overline{C}}$

פיתרון:

ראינו בתרגיל בית ש: $x \in A \triangle B \triangle C$ אמ"ם x נמצא במס' אי זוגי של קבוצות. לכן: $x \in \overline{A} \triangle \overline{B} \triangle \overline{C}$ אמ"ם הוא במס' אי זוגי של קבוצות מתוכן, ולכן זה אומר שהוא לא נמצא במס' אי זוגי של קבוצות מתוך A, B, C. כיון ש־3 הוא מספר אי זוגי ומורידים מספר אי זוגי לכן הוא נמצא במס זוגי של קבוצות מתוך A, B, C, ולכן המשלים של זה, זה האיברים שנמצאים במס' אי־זוגי של קבוצות מתוכן, שזה בדיוק ההפרש הסימטרי.

3. תהא A קבוצה ויהא R יחס סדר חלקי מעל A

(א) הגדירו מהו איבר מינימלי ומהו איבר קטן ביותר

(ב) הוכיחו או הפריכו: אם $a \in A$ איבר מינימלי יחיד אזי a הוא איבר קטן ביותר ב־A

פתרון:

א. תהא $A, \leq$ קבוצה סדורה חלקית, $a \in A$ ייקרא מינימלי אם:

$$\forall b \in A : b \leq a \Rightarrow b = a$$

$a \in A$ ייקרא קטן ביותר אם:

$$\forall b \in A : a \leq b$$

ב. דוגמה נגדית: נגדיר יחס R מעל $A = \mathbb{Z} \cup \{\{1\}\}$, בצורה הבאה aRb אם"ם $a, b \in \mathbb{Z} \wedge a \leq b$ או $a = b = \{1\}$.

צ"ל שזה יחס סדר חלקי:

רפלקסיביות: לכל $a \in A$ אם $a = \{1\}$ אזי לפי ההגדרה aRa וכן אם $a \in \mathbb{Z}$ גם כן מתקיים aRa.

אנטי סמטריות: אם $(a, b), (b, a) \in R$ אזי אם $a = \{1\}$ אזי לפי ההגדרה $a = b$. אם $a \in \mathbb{Z}$ אזי בהכרח לפי הגדרת היחס גם $b \in \mathbb{Z}$ ואם $a \leq b \wedge b \leq a$ בהכרח $a = b$.

טרנזטיביות: אם $(a, b), (b, c) \in R$ אזי אם $a = \{1\}$ אזי לפי ההגדרה $a = b = c$ וכמובן $(a, c) = (a, a) \in R$. אם $a \in \mathbb{Z}$ אזי בהכרח לפי הגדרת היחס גם $b \in \mathbb{Z}$ וגם $c \in \mathbb{Z}$ ומתקיים $a \leq b \leq c$ ובפרט $(a, c) \in R$.

$\{1\}$ הוא איבר מינימלי בקבוצה כי פרט לעצמו אף איבר לא ניתן להשוואה עימו, יחיד כי לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים ש־$a - 1 < a$, והוא לא הקטן ביותר כי אף איבר לא ניתן להשוואה עימו.

4. תהא A קבוצה

(א) הגדירו מהי חלוקה של A

(ב) הגדירו מהו יחס שקילות מעל A

(ג) הראו שכל חלוקה של A משרה יחס שקילות מעל A

i. חלוקה של קבוצה A היא אוסף תת־קבוצות לא ריקות של A, זרות בזוגות שאיחודן הוא A

ii. יחס שקילות הוא יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי

iii. תהא $\mathcal{F}$ חלוקה של A. נגדיר יחס מעל A כך:

$$xRy \equiv \exists S \in \mathcal{F}.\ x \in S \wedge y \in S$$

נראה שהיחס שהגדרנו הוא יחס שקילות. נזכיר טענה שראינו בכיתה:

טענה: היא R יחס שקילות מעל קבוצה A. אז 1. $\forall x \in A.\ x \in [x]$ ובנוסף 2. $\forall x, y \in A.\ y \in [x] \leftrightarrow [y] = [x]$

כעת: רפלקסיביות – לכל $x \in A$ יש $S \in \mathcal{F}$ כך ש $x \in S$ (כי $\cup\mathcal{F} = A$) ובפרט $\exists S \in \mathcal{F}.\ x \in S \wedge x \in S$ כלומר xRx.

סימטריות – מושרה מהסימטריה של $\wedge$.

טרנזיטיביות – נניח ש $\exists S \in \mathcal{F}.\ x \in S \wedge y \in S$ ובדומה $\exists T \in \mathcal{F}.\ y \in T \wedge z \in T$. נראה ש $S = [y]$. ואכן לכל $s \in S$ מהגדרת R מקבלים yRs ובפרט $s \in [y]$. מצד שני, אם $s \in [y]$ אז sRy ובפרט יש S' כך ש $y \in S'$ וגם $s \in S'$. מתכונות חלוקה אם $y \in S \wedge y \in S'$ אז $S = S'$. מכאן, $s \in S$. מסקנה $S = [y]$. בדומה ניתן להראות ש $T = [y]$. ומכאן שיש קבוצה בחלוקה (נניח S) כך ש $x \in S \wedge z \in S$ ובפרט xRz.

5. תהיינה A, B קבוצות, $f : A \to B$ פונקציה

(א) הגדירו: f הפיכה

(ב) הוכיחו: f הפיכה $\Longleftarrow$ f חח"ע ועל

(ג) הראו: אם $|A| = |B| = n < \infty$ אז f חח"ע אם"ם f על

פיתרון:

א. פונקציה $f : A \to B$ תקרא הפיכה אם קיימת פונקציה $g : B \to A$ כך ש־ $g \circ f = Id_A, f \circ g = Id_B$.

ב. נניח f הפיכה, לכן לפי הגדרה קיימת $g : B \to A$ כך ש־ $f \circ g = I_B, g \circ f = I_A$. פונקציית הזהות היא כמובן חח"ע ועל. כעת קיבלנו ש־ $g \circ f$

חח"ע ומטענה שראינו בתרגול נובע ש־ f חח"ע, ובנוסף $f \circ g$ על ומאותה טענה נובע f על. ובסה"כ f חח"ע ועל.

ג. נסמן $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

$\Leftarrow$: כיון שהפונקציה חח"ע נובע שלכל $a_1 \neq a_2$ מתקיים $f(a_1) \neq f(a_2)$, ולכן בקבוצה $Im(f) = \{f(a_1, \dots a_n\}$ יש n איברים. כעת מתקיים תמיד $Im(f) \subseteq B$, ומשיוויון במספר האיברים נובע (בקבוצות סופיות) שיוויון בין הקבוצות, כלומר $Im(f) = B$ שזה שקול לכך ש־f על.

$\Rightarrow$: הפונקציה על ולכן $Im(f) = B$, ולכן $|Im(f)| = n$. נניח בשלילה שהפונקציה לא חח"ע, לכן יש $1 \leq i < j \leq n$ כך ש $f(a_i) \neq f(a_j)$. לכן בקבוצה $Im(f) = \{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$, ניתן להשמיט את אחד האיברים הנ"ל, כי הוא חוזר על עצמו פעמיים, ולכן יש שם $n-1$ איברים בסתירה.

0>0