1

מטלה מס' 8 - פתרונות סופיים

$$y(t)=\frac{2}{3}e^{4t}-\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{11}{6}\cdot e^{t}$$ א 1

$$y(t)=\frac{1}{20}e^{3t}-\frac{5}{4}e^{-t}+\frac{16}{5}e^{\frac{1}{2}t}$$ ב

$$y''+2y'+y=e^{3t}\,,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=3$$ ג

פתרון

$$\mathcal{L}[y''+2y'+y](s)=\mathcal{L}[e^{3t}](s)$$

$$\mathcal{L}[y''](s)+2\,\mathcal{L}[y'](s)+\mathcal{L}[y](s)=\frac{1}{s-3}$$

$$\underbrace{s^2\cdot Y(s)-s\,y(0)-y'(0)}_{\mathcal{L}[y''](s)}+2\underbrace{(sY(s)-y(0))}_{\mathcal{L}[y'](s)}+\underbrace{Y(s)}_{\mathcal{L}[y](s)}=\frac{1}{s-3}$$

$$s^2\cdot Y(s)-2s-3+2(sY(s)-2)+Y(s)=\frac{1}{s-3}$$

$$Y(s)=\frac{2s^2+s-20}{(s-3)(s^2+2s+1)}=\frac{2s^2+s-20}{(s-3)(s+1)^2}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{(s+1)^2}$$

$$2s^2+s-20=(A+B)s^2+(2A-2B+C)s+(A-3B-3C)$$

לאחר השוואת מקדמים:

$$s^2:\ A+B=2 \quad\to\quad A=2-B$$

$$s:\ 2A-2B+C=1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}4-4B+C=1\\ 2-4B-3C=-20\end{cases}$$

$$s^0:\ A-3B-3C=-20$$

$$4C=15\ \to\ C=\frac{15}{4}$$

$$A=\frac{32}{16}-\frac{31}{16}=\frac{1}{16}\ \leftarrow\ B=\frac{31}{16}$$

לכן

$$Y(s)=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{s-3}+\frac{31}{16}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{(s+1)^2}$$

כדי למצוא את $y(t)$ נשתמש בטבלת לפלס הפוכה:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t)=\frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right](t)+\frac{31}{16}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right](t)+\frac{15}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right](t)=\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{31}{16}e^{-t}+\frac{15}{4}e^{-t}\cdot t$$

10 כלל משפט

$y(t) = 2e^{-t} + 5t\cdot e^{-t} + \frac{t^2}{2}e^{-t}$ (3)

$y(t) = 3e^{t} - e^{-t} - t$ (2)

$y(t) = \frac{1}{25}e^{-3t} - \frac{1}{25}e^{2t} + \frac{1}{5}t\cdot e^{2t}$ (1)

$y'' - 2y' + 7y = \sin t \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0$ (5)

פתרון:

$$\mathcal{L}[y'' - 2y' + 7y](s) = \mathcal{L}[\sin t](s)$$

$$\mathcal{L}[y''](s) - 2\mathcal{L}[y'](s) + 7\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\underbrace{s^2\cdot Y(s) - sy(0) - y'(0)}_{\mathcal{L}[y''](s)} - 2(\underbrace{sY(s) - y(0)}_{\mathcal{L}[y'](s)}) + 7\underbrace{Y(s)}_{\mathcal{L}[y](s)} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$s^2\cdot Y(s) - 2sY(s) + 7Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$(s^2 - 2s + 7)\cdot Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2-2s+7)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2-2s+7}$$

נפתח סוגריים ונשווה מקדמים.. נקבל:

$$A = \frac{1}{20} \, , \, C = -\frac{1}{20} \, , \, D = -\frac{1}{20} \, , \, B = \frac{3}{20}$$

נקבל:

$$Y(s) = \frac{1}{20}\cdot\frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{20}\cdot\frac{s}{(s-1)^2+(\sqrt{6})^2}$$

$$- \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{(s-1)^2+(\sqrt{6})^2} = \frac{1}{20}\cdot\frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{20}\left[\frac{(s-1)}{(s-1)^2+(\sqrt{6})^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(s-1)^2+(\sqrt{6})^2}\right] - \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{(s-1)^2+(\sqrt{6})^2}$$

$$= \frac{1}{20}\cdot\frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{20}\frac{(s-1)}{(s-1)^2+(\sqrt{6})^2} - \frac{1}{10\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{(s-1)^2+(\sqrt{6})^2}$$

נבצע התמרה הפוכה:

$$y(t) = \frac{1}{20}\cos t + \frac{3}{20}\sin t - \frac{1}{20}e^{t}\cos\sqrt{6}t - \frac{1}{10\sqrt{6}}e^{t}\sin\sqrt{6}t$$

$$y''+3y'+2y=\begin{cases} t, & 0<t<1 \\ 2-t, & 1\le t<2 \\ 0, & t\ge 2\end{cases} \quad , y(0)=y'(0)=0$$ ד

פתרון:

נרשום את הצלע הימין של ⊛ בעזרת פונק' Heaviside:

$$f(t)=u_0(t)\cdot t+u_1(t)(2-t)-u_1(t)\cdot t+\underbrace{u_2(t)\cdot 0}_{=0}-u_2(t)(2-t)$$

כדי להשתמש בנוסחת ההזזה של פונק' Heaviside:

$$\underline{L[u_c(t)\cdot f(t-c)](s)=e^{-cs}\cdot L[f(t)](s)}$$

נרצה שכל הגורמים יהיו בצורה $u_c(t)f(t-c)$, נסדר אותם בהתאם:

$$f(t)=u_0(t)\cdot(t-0)-u_1(t)\cdot(t-1)+u_1(t)\cdot 1-u_1(t)\cdot t+u_2(t)(t-2)$$
$$=u_0(t)\cdot(t-0)-2u_1(t)(t-1)+u_2(t)(t-2)$$

נפעיל את ההתמרה:

$$L[f(t)](s)=L[u_0(t)(t-0)](s)-2L[u_1(t)(t-1)](s)+L[u_2(t)(t-2)](s)$$
$$=e^{-0\cdot s}\cdot\frac{1}{s^2}-2e^{-s}\cdot\frac{1}{s^2}+e^{-2s}\cdot\frac{1}{s^2}$$

נפתור את ⊛

$$L[y''+3y'+2y](s)=L[f(t)](s)=e^{-0\cdot s}\cdot\frac{1}{s^2}-2e^{-1\cdot s}\cdot\frac{1}{s^2}+e^{-2s}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$s^2Y(s)-s\overset{0}{y(0)}-\overset{0}{y'(0)}+3(sY(s)-\overset{0}{y(0)})+2Y(s)=(e^{-0\cdot s}-2\cdot e^{-1\cdot s}+e^{-2s})\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)=(e^{-0\cdot s}-2\cdot e^{-1\cdot s}+e^{-2\cdot s})\cdot\underbrace{\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)}}$$

$$\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+1}+\frac{D}{s+2}$$

$$\underline{A=-\frac{3}{4},\ B=\frac{1}{2},\ C=1,\ D=-\frac{1}{4}}$$ ... בהשוואת מקדמים

4

$$Y(s) = \left(e^{-0.s} - 2\cdot e^{-1s} + e^{-2s}\right)\left(-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2}\right)$$

$$= e^{-0.s}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\frac{1}{s} + e^{-0.s}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2} + e^{-0.s}\cdot\frac{1}{s+1} - e^{-0.s}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$+ e^{-1.s}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s} - e^{-1.s}\cdot\frac{1}{s^2} - e^{-1.s}\cdot 2\cdot\frac{1}{s+1} + e^{-1.s}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$- e^{-2s}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s} + e^{-2s}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2} + e^{-2s}\cdot\frac{1}{s+1} - e^{-2s}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)](t)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t)}} = u_0(t)\cdot\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right)$$

$$+ u_1(t)\left(\frac{3}{2} - (t-1) - 2e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right)$$

$$- u_2(t)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}(t-2) - e^{-(t-2)} + \frac{1}{4}e^{-2(t-2)}\right)$$

⑤

$$y'+y=\underbrace{\begin{cases}\sin t, & 0\le t<2\pi\\ 0, & t\ge 2\pi\end{cases}}_{f(t)}$$

ⓐ ②

עם תנאי התחלה $y(0)=1$.

<u>פתרון:</u>

נכתוב את $f(t)$ בעזרת פונק Heaviside

$$f(t)=H(t-0)\cdot\sin t+\cancel{H(t-2\pi)\cdot 0}-H(t-2\pi)\sin t$$

נסדר את G הביטויים כך שיהיו בצורה $H(t-c)\cdot f(t-c)$, כדי לנצל

לצורך הנוסחה הבאה: $L[H(t-c)f(t-c)]](s)=e^{-cs}\cdot L[f(t)](s)]$

$$\boxed{f(t)=H(t-0)\cdot\sin t-H(t-2\pi)\cdot\sin(t-2\pi)}\quad //\ \sin(t-2\pi)=\sin t$$

$$L[y'+y](s)=L[H(t-0)\sin(t-0)-H(t-2\pi)\sin(t-2\pi)](s)$$

$$s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{=1}+Y(s)=e^{-0\cdot s}\cdot\frac{1}{s^2+1}-e^{-2\pi\cdot s}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)(s+1)=e^{-0\cdot s}\cdot\frac{1}{s^2+1}-e^{-2\pi s}\cdot\frac{1}{s^2+1}+1$$

$$Y(s)=\left(e^{-0\cdot s}-e^{-2\pi\cdot s}\right)\cdot\frac{1}{(s^2+1)(s+1)}+\frac{1}{s+1}$$

$$\frac{1}{(s^2+1)(s+1)}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{C}{s+1}$$

$$1=(A+C)s^2+(A+B)s+(B+C)$$

$s^2:\ A+C=0$

$s^1:\ A+B=0$ $\Rightarrow \begin{cases}B-C=0\\ B+C=1\end{cases} \Rightarrow B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, $A=-\frac{1}{2}$

$s^0:\ B+C=1$

$$Y(s)=\left(e^{-0\cdot s}-e^{-2\pi s}\right)\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1}\right]+\frac{1}{s+1}$$

$$\underline{\underline{y(t)}}=L^{-1}[Y(s)](t)=H(t)\left(-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}e^{-t}\right)$$
$$-H(t-2\pi)\left(\frac{1}{2}\cos(t-2\pi)-\frac{1}{2}\sin(t-2\pi)-\frac{1}{2}e^{-(t-2\pi)}\right)$$
$$+e^{-t}$$