

מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132)

מבחן לדוגמה

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון. כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

ניקוד: שאלה ראשונה שווה 15 נקודות, כל סעיף בשאלות 2-5 שווה 10 נקודות. שאלת בונוס שווה 7 נקודות.

שאלה 1

הוכיחו את מבחן Leibniz (עבור טור עם סימנים מתחלפים):

נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ הוא טור עם סימנים מתחלפים (כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור חיובי).

אם מתקיים:

א. $a_n \geq a_{n+1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$;

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס.

שאלה 2

א. מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(\ln n)^2}$, במידה וקיים.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ אזי $\langle a_n \rangle$ היא סדרת קושי (Cauchy).

שאלה 3

א. נתון שהפונקציה $f(x) = \begin{cases} ax + b & x \geq 0 \\ \cos x & x < 0 \end{cases}$ גזירה בכל נקודה.

מצאו את a, b ($a, b \in \mathbb{R}$).

ב. מצאו $\frac{dy}{dx}$ עבור $x = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} - 1$ ($y > 0$) (ניתן להשאיר את התשובה כפונקציה של y).

שאלה 4

קבעו לגבי כל טור האם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר:

א. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n + 1}{3^n - 2}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin^2 n}{n^3 + 1}$

ג. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

שאלה 5

א. תהי f פונקציה גזירה בנקודה x_0 ותהי $a \in \mathbb{R}$ נקודה כלשהי. הוכיחו שמתקיים:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ah) - f(x_0)}{h} = af'(x_0)$$

ב. תהי f פונקציה המקיימת $|f(x)| \leq 1 - \cos x$ לכל $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. הוכיחו שהפונקציה

גזירה בנקודה $x = 0$ ומצאו את נגזרתה.

שאלת בonus

תהי $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ונניח כי $0 \in (a, b)$. נניח ש- f מונוטונית וכן מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = 0$$

הוכיחו ש- f גזירה בנקודה $x = 0$.

בהצלחה!