פתרון תרגיל בית 8 – טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

נתבונן בשלושה תתי מרחבים של $\mathbb{R}^2$:

$$X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$$
$$Y=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+y^2=1\right\}$$
$$Z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=1\right\}$$

ראינו בכיתה ש-Z אינו הומיאומורפי ל-X. האם Y הומיאומורפי ל-X או ל-Z?
הוכיחו את תשובתכם!

<u>פתרון</u>

עשינו הוכחות מלאות כאלה בכיתה ולכן כאן נרשום רק את הרעיון. הרעיון הוא שב-X וב-Z, הוצאת **כל** נקודה לא פוגעת בקשירותו של המרחב. עם זאת ב-Y, ישנה נקודה **אחת** שהוצאתה פוגעת בקשירות (נקודת ההשקה).

מש"ל

<u>שאלה 2</u>

תהי X קבוצה לא ריקה עם הטופולוגיה הקו-סופית. האם המרחב $(X,\tau_{cofinite})$ קשיר? (רמז: תלוי בעוצמה של X).

<u>פתרון</u>

אם X סופי אז הטופולוגיה הקו סופית היא בדיוק הטופולוגיה הדיסקרטית כי כל תת קבוצה סופית ולכן סגורה. (מה שאומר שגם כל תת קבוצה פתוחה). טופולגיה זו קשירה אם ורק אם ב X איבר אחד (אם יש יותר מאיבר אחד אז $X=\{x\}\cup(X-\{x\})$ ולכן X לא קשיר).

נראה שאם X אינסופי המרחב קשיר. אחרת, קיימת ב X תת קבוצה סגוחה לא טריוויאלית A.

אם A סגורה ושונה מ X הרי ש A סופית. אם A פתוחה ולא ריקה הרי ש A^c סופית. מכאן $X = A \cup A^c$ סופי וזו סתירה.

מסקנה: X קשיר אם הוא אינסופי או בעל איבר אחד ולא קשיר אם הוא סופי בעל יותר מאיבר אחד.

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

<u>תזכורת</u> – הישר של סורגנפריי. נסמן ב- $\mathbb{R}_\ell$ את $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הבאה T:

$O \in T$ אמ"מ O היא איחוד של קטעים מהצורה $[a,b)$ (כולל איחוד ריק).

א. הוכיחו כי מרכיבי הקשירות של $\mathbb{R}_\ell$ הם הנקודונים.

כלומר, הראו שאם A הוא תת מרחב בעל יותר מנקודה אחת, אזי הוא אינו קשיר.

ב. מצאו את כל הפונקציות הרציפות $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\ell$. כלומר, קבעו אילו פונקציות הן רציפות והוכיחו גם שהפונקציות שלא נכנסו לרשימה שלכם – הן אינן רציפות.

<u>פתרון</u>

א. יהי A תת מרחב בעל יותר מנקודה אחת ונוכיח שהוא אינו קשיר. קיימות ב-A לפחות שתי נקודות שנסמנן $x, y \in A$. בה"כ נניח $x < y$. נגדיר $V = [y,\infty) \bigcap A$, $U = (-\infty, y) \bigcap A$. ברור ש-$U,V$ זרות ולא ריקות (שכן $x \in U,\ y \in V$). נותן להראות שהן פתוחות בתת המרחב A. מספיק להראות ש-$(-\infty, y), [y,\infty)$ פתוחות ב-$\mathbb{R}_\ell$. מכיוון שראינו שהטופולוגיה של סורגנפריי מכילה את הטופולוגיה האוקלידית (הסטנדרטית) על $\mathbb{R}$, ידוע ש-$(-\infty, y)$ פתוחה. כעת, את $[y,\infty)$ ניתן להציג כ: $[y,\infty) = \bigcup_{y<c} [y,c)$ ולכן היא פתוחה כאיחוד פתוחות.

מכאן, מכיוון ש-$U \bigcup V = A$ נקבל ש-A לא קשיר.

ב. קודם כל, הוכחתם טענה כללית לפיה פונקציה קבועה בין מרחבים טופולוגיים היא רציפה. נוכיח שאלה הן כל הפונקציות הרציפות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_\ell$.

נניח בשלילה שקיימת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_\ell$ פונקציה רציפה שאינה קבועה.

מכיוון ש-$\mathbb{R}$ קשיר, נקבל ש-$f(\mathbb{R})$ הוא תת מרחב קשיר של $\mathbb{R}_\ell$.

הפונקציה אינה קבועה ולכן ב-$f(\mathbb{R})$ יש יותר מנקודה אחת. וזאת בסתירה לסעיף א'.

מש"ל

שאלה 4

יהי X מ"ט, ותהיינה $A,B\subseteq X$ ת"ק.

א. הוכיחו כי מתקיים $cl(A\cap B)\subseteq cl(A)\cap cl(B)$.

ב. הראו על ידי דוגמה נגדית כי לא ניתן להחליף את ההכלה בסעיף א' בשיוויון.

ג. נסחו והוכיחו טענה דומה (כמו בסעיף א') עבור $int(A\cup B)$.

פתרון

א. טענת עזר: $cl(C)\subseteq cl(D) \Leftarrow C\subseteq D$.

הוכחת טענת עזר: $C\subseteq D$ לכן מכיון ש $D\subseteq cl(D)$ נקבל ש $C\subseteq cl(D)$.

כעת, $cl(D)$ סגורה המכילה את C ומכיון ש $cl(C)$ הסגורה **המינימלית** המכילה את C נקבל ש $cl(C)\subseteq cl(D)$. מש"ל טענת עזר.

$A\cap B\subseteq A$ לכן עפ"י טענת העזר נקבל ש $cl(A\cap B)\subseteq cl(A)$ ובאופן דומה מקבלים ש-$cl(A\cap B)\subseteq cl(B)$ ולכן בסה"כ

$cl(A\cap B)\subseteq cl(A)\cap cl(B)$.

ב. נתבונן במרחב המטרי $\mathbb{R}$ ויהיו $\begin{cases} A=(0,1) \\ B=(1,2) \end{cases}$ אזי $cl(A\cap B)=\varnothing \Leftarrow A\cap B=\varnothing$

$\begin{cases} cl(A)=[0,1] \\ cl(B)=[1,2] \end{cases}$ ולכן $cl(A)\cap cl(B)=\{1\}$ ומתקיים

$\{1\}=cl(A)\cap cl(B)\not\subset cl(A\cap B)=\varnothing$.

ג. הטענה: $\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{int}(B)\subseteq\operatorname{int}(A\cup B)$.

הוכחה: $A\subseteq A\cup B$ וגם $\operatorname{int}(A)\subseteq A$ (לפי ההגדרה של הפנים) ולכן $\operatorname{int}(A)\subseteq A\cup B$. אך $\operatorname{int}(A)$ זו קבוצה פתוחה שמוכלת ב- $A\cup B$ ולכן $\operatorname{int}(A)\subseteq\operatorname{int}(A\cup B)$. באותו אופן מראים ש- $\operatorname{int}(B)\subseteq\operatorname{int}(A\cup B)$ וזה מסיים את ההוכחה.

מש"ל

שאלה 5

יהיו X,Y מ"ט, ותהי $f:X\to Y$ הומאומורפיזם. הוכיחו כי עבור $A\subseteq X$ מתקיים $f(int(A))=int(f(A))$.

פתרון

$f:X\to Y$ הומיאו' ובפרט פונקציה פתוחה ולכן $f(\operatorname{int}(A))$ פתוחה. כמו כן $\operatorname{int}(A)\subseteq A$ ולכן $f(\operatorname{int}(A))\subseteq f(A)$. בסה"כ נקבל ש $f(\operatorname{int}(A))$ פתוחה המוכלת ב $f(A)$ ולכן $f(\operatorname{int}(A))\subseteq\operatorname{int}(f(A))$. נוכיח את ההכלה ההפוכה ונקבל שוויון.

באופן דומה מכיון ש f הומיאו' אז f^{-1} פתוחה ומכאן
$f^{-1}(\operatorname{int}(B))\subseteq\operatorname{int}(f^{-1}(B))$ לכל $B\subseteq Y$. נציב $B=f(A)$ ונקבל
$f^{-1}(\operatorname{int}(f(A)))\subseteq\operatorname{int}(A)$. נפעיל f על שני האגפים ונקבל ש

$\operatorname{int}(f(A))\subseteq f(\operatorname{int}(A))$. בסה"כ $f(\operatorname{int}(A))=\operatorname{int}(f(A))$.

מש"ל

<u>שאלה 6</u>

יהי X מ"ט ותהי $A \subseteq X$. תהי $\chi_A : X \to \{0,1\}$ פונקציה אופיינית המוגדרת ע"י $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$. יהי $x \in X$.

א) הוכיחו שאם χ_A רציפה ב-x אז $x \notin \partial(A)$.

ב) הוכיחו ש χ_A רציפה אם ורק אם A סגוחה ב-X.

ג) הסיקו שאם X לא קשיר אז קיימת פונקציה רציפה ועל $f : X \to \{0,1\}$.

<u>פתרון</u>

א) נחלק למקרים: מקרה ראשון- $x \in A$. לכן, $\chi_A(x) = 1$. מהרציפות בנקודה x ומכיון ש $\{1\}$ סביבה של 1 נקבל שקיימת V סביבה של x כך ש $\chi_A(V) \subseteq \{1\}$. מכאן נובע ש $x \in V \subseteq A$. לכן, $x \in \text{int}(A)$ ולכן $x \notin \partial(A)$. מקרה שני- $x \notin A$. לכן, $\chi_A(x) = 0$. מהרציפות בנקודה x ומכיון ש $\{0\}$ סביבה של 0 נקבל שקיימת V סביבה של x כך ש $\chi_A(V) \subseteq \{0\}$. מכאן נובע ש $V \cap A = \varnothing$ ולכן $x \notin cl(A)$ ובסה"כ $x \notin \partial(A)$.

ב) עפ"י סעיף א' ומה שהוכחנו בתרגול χ_A רציפה ב-x אמ"מ $x \notin \partial(A)$.
כעת, χ_A רציפה אמ"מ χ_A רציפה ב-x לכל $x \in X$ וזה אמ"מ $x \notin \partial(A)$ לכל $x \in X$. התנאי האחרון מתקיים אמ"מ $\partial(A) = \varnothing$.
נוכיח את טענת העזר הבאה ונסיים את ההוכחה.
טענת עזר: $\partial(A) = \varnothing$ אמ"ם A סגוחה.
הוכחת טענת עזר: $\Rightarrow$ אם A סגוחה אז היא סגורה ופתוחה. מכאן $A = cl(A)$ וגם $A = \text{int}(A)$. מכאן $\partial(A) = cl(A) \setminus int(A) = \varnothing$.
$\Leftarrow$ תמיד מתקיים $\text{int}(A) \subseteq A \subseteq cl(A)$ ולכן אם $\partial(A) = cl(A) \setminus int(A) = \varnothing$
נקבל ש $\text{int}(A) = cl(A)$ ומכאן גם $\text{int}(A) = A = cl(A)$ ולכן A סגוחה.

מש"ל הוכחת טענת עזר.

הערה: ניתן היה לפתור את התרגיל בשימוש ברציפות גלובלית ובכך שרציפות שקולה לכך שתמונה הפוכה של פתוחה (סגורה) היא פתוחה (בהתאמה סגורה).

ג) אם X לא קשיר אז קיימת סגוחה לא טריוויאלית A ואז עפ"י סעיף ב' הפונקציה $\chi_A : X \to \{0,1\}$ רציפה. מכיון ש $\varnothing \neq A \neq X$ נקבל ש $\chi_A : X \to \{0,1\}$ על (מדוע?).

מש"ל